DERIVADA DE UNA FUNCIÓN 1

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Sea f una función real de variable real y $a \in Dom(f)$.
Se llama **derivada de f en el punto a** , y se representa por f ' (a) , al siguiente límite, siempre que exista y sea finito:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En tal caso, se dirá que la función **f es derivable en el punto a** .

Ejemplo 1.1 **Hallar la derivada de la función identidad en el punto a = -3.**

Solución .- Recordemos que se trata de la función f(x) = x , y que Dom (f) = **R** .

$$f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3+h-(-3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Ejemplo 2.1 **¿Es derivable la función $f(x) = x^2 - 6$ en el punto a = 5 ?**

Solución .- Al ser una función polinómica, Dom (f) = **R** .

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-6-19}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{25+10h+h^2-25}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(10+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(10+h) = 10\ .$$

Se observa que el límite existe y es finito; por tanto, f es derivable en el punto 5 y su derivada vale 10, es decir, f ' (5) = 10 .

Ejemplo 3.1 **Hallar la derivada de la función** $f(x)=3x^3-x+1$ **en el punto a =** $\frac{1}{3}$.

<u>Solución</u> .- Como anteriormente, Dom (f) = **R** .
Otra forma de proceder es obteniendo, ante todo, el numerador que interviene en el límite:

$$f\left(\tfrac{1}{3}+h\right) = 3\left(\tfrac{1}{3}+h\right)^3-\left(\tfrac{1}{3}+h\right)+1 = 3\left(\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{3}h+h^2+h^3\right)-\left(\tfrac{1}{3}+h\right)+1 =$$

$$= \tfrac{1}{9}+h+3h^2+3h^3-\tfrac{1}{3}-h+1 = 3h^3+3h^2+\tfrac{7}{9}$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{3}+1 = \tfrac{7}{9}$$

En definitiva:

$$f'\left(\tfrac{1}{3}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{3h^3+3h^2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to 0} 3h(h+1) = 0.$$

Ejemplo 4.1 **Hallar la derivada de la función** $f(x)=\frac{1}{x}$ **en el punto a = 3 .**

Solución .- Tenemos ahora una función racional, siendo Dom (f) = **R** $-\{0\}$.

$$f(3+h)-f(3)=\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}=\frac{-h}{3(3+h)}$$

$$f\,'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{3(3+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{3h(3+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3(3+h)}=\frac{-1}{9}\,.$$

Ejemplo 5.1 **¿Es derivable la función** $f(x)=\sqrt{x-1}$ **en el punto a = 1 ?**

Solución .- En esta función irracional Dom (f) = $[1,+\infty)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\sqrt{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$$

Como el resultado del límite es infinito, esta función *no es derivable* en el punto a =1.

OTRA EXPRESIÓN PARA LA DERIVADA

Si en la definición inicial se hace el cambio de variables a + h = x , se tiene:

1.- h = x - a
2.- $h\to 0 \;\Rightarrow\; x\to a$

Y tenemos, así, la siguiente expresión , que también nos proporciona la derivada de una función en un punto:

$$f\,'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ejemplo 6.1 **Hallar la derivada de la función** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **en el punto a = 1.**

Solución .- Utilizaremos la nueva expresión teniendo en cuenta que f(1) = 0.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{2}{2}=1$$

Ejemplo 7.1 **Calcular el valor de *m* en la función** $f(x)=\dfrac{m}{x^2}$ **sabiendo que f '(1) = 2.**

Solución .-

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{m}{x^2}-m}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{m-mx^2}{x^2(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{m(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-m(1+x)}{x^2}=-2m$$

Al ser f '(1) = 2, entonces -2*m* = 2 y, por tanto, *m* = -1 .

Ejemplo 8.1 **Obtener el valor de *m* en la función** $f(x)=\sqrt{x^2+m}$ **sabiendo que f '(1) =** $\frac{1}{2}$ **.**

Solución .-

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+m}-\sqrt{1+m}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+m}-\sqrt{1+m})(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{1+m})}{(x-1)(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{1+m})}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+m-1-m}{(x-1)(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{1+m})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{1+m})} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+m}+\sqrt{1+m}} = \frac{2}{2\sqrt{1+m}} = \frac{1}{\sqrt{1+m}} .$$

Al ser f ' (1) = $\frac{1}{2}$ llegamos a la ecuación $\sqrt{1+m} = 2$, cuya solución es $m = 3$.

FUNCIÓN DERIVADA

Se dice que f es **derivable** si lo es en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 9.1 **Comprobar que la función $f(x) = x^4 + 7$ es derivable.**

Solución .- Como Dom (f) = **R** , habrá que comprobar que f es derivable en un conjunto infinito de puntos. Se comprende que resultaría imposible hacerlo punto a punto, por lo que se elige un punto genérico $a \in Dom(f)$.
Se trata de ver que f es derivable en a , $\forall a \in Dom(f)$.
Efectivamente:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^4-a^4}{x-a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} (x+a)(x^2+a^2) = 2a \cdot 2a^2 = 4a^3$$

El límite existe y es finito $\forall a \in \boldsymbol{R}$; por tanto, la función es derivable en **R** .

Sea f una función derivable. Si a cada $x \in Dom(f)$ le hacemos corresponder $f'(x)$, obtenemos una nueva función, que se llama **función derivada** de f , y la representaremos por f' .
El dominio de f' puede ser considerablemente más pequeño que el de f .

Ejemplo 10.1 **Hallar la función derivada de** $f(x) = x^4 + 7$.

Solución .- Según el ejemplo anterior, f '(a) = $4a^3$; por lo tanto, su función derivada será f '(x) = $4x^3$.
Obsérvese que *Dom(f ') = Dom(f)* = **R** .

Ejemplo 11.1 **¿Es derivable la función** $f(x) = \sqrt{x}$ **?**

Solución .- Como *Dom (f)* = $[0,+\infty)$ tomaremos $a \geq 0$.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Se observa que f no es derivable en el punto $a = 0$, pues el límite sería infinito.
En este caso, el $Dom(f') = (0,+\infty)$, *que* es más reducido que el Dom(f) = $[0,+\infty)$.

Ejemplo 12.1
a) Hallar la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.
b) Calcular la derivada de *f* en los cinco primeros cuadrados perfectos.

Solución .-

a) Hemos visto que f es derivable en $(0,+\infty)$, siendo $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) Un cuadrado perfecto es un número entero con raíz cuadrada exacta.
Los cinco primeros son: 1, 4, 9, 16 y 25 . Si se empleara la definición habría que calcular cinco límites. Pues bién, este trabajo superfluo puede evitarse con la función derivada.
Del apartado a) se deduce que

$$f'(1) = \tfrac{1}{2} \quad f'(4) = \tfrac{1}{4} \quad f'(9) = \tfrac{1}{6} \quad f'(16) = \tfrac{1}{8} \quad f'(25) = \tfrac{1}{10}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

Las funciones constantes son del tipo $f(x) = c$, $c \in \boldsymbol{R}$.
Sea $a \in Dom(f)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

Por tanto, toda función constante es derivable en **R** y su derivada es nula.

$$\boxed{f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

La función identidad, $f(x) = x$, es derivable en **R** y su derivada vale uno.
En efecto:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1$$

$$\boxed{f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1}$$

DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES

Recordemos que , si f y g son dos funciones reales, se define la suma, $f+g$, como:

1.- $Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
2.- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in Dom(f+g)$.

Supongamos que f y g son derivables en a .

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right] = f\,'(a) + g\,'(a)$$

Por tanto, $f + g$ también es derivable en a y la derivada de la suma es la suma de las derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f\,'(x) + g\,'(x)}$$

Ejemplo 13.1 **Sean** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **y** $g(x) = \sqrt{x}$ **. Hallar** ***(f + g)'(1) .***

Solución .- Teniendo en cuenta los Ejemplos 6.1 y 12.1

$$(f + g)'\,(1) = f\,'(1) + g\,'(1) = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$

Ejemplo 14.1 **Generalizar el resultado para la suma de 3, 4 , ... , *n* funciones.**

Solución .- En términos funcionales puede escribirse $(f + g)' = f\,' + g\,'$.
Para el caso de tres funciones, f , g y h , supongamos que $f + g = F$.
Entonces:

$$(f+g+h)' = (F+h)' = F' + h' = (f+g)' + h' = f\,' + g' + h'$$

Por inducción, puede extenderse esta propiedad a un número finito de sumandos, es decir:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = (f_1 + f_2 + ... + f_n)' = f_1' + f_2' + ... + f_n' = \sum_{i=1}^{n} f_i'$$

DERIVADA DEL PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA FUNCIÓN

Sea f una función derivable en $a \in Dom(f)$ y $k \in \boldsymbol{R}$.
Recordemos que $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$.

$$(k \cdot f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(kf)(x) - (kf)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{kf(x) - kf(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} k \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k \cdot f'(a)$$

Es decir, la derivada del producto de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función.

$$\boxed{(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 15.1 **Sea** $f(x) = \sqrt{x}$ **. Hallar (3f)'(9) .**

Solución .- Recordando el apartado b) del Ejemplo 12.1 :

$$(3f)'(9) = 3f\,'(9) = 3 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}$$

Ejemplo 16.1 **Con las reglas conocidas hasta el momento, calcular, sin utilizar límites, las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 3$ **b)** $f(x) = x$ **c)** $f(x) = x + 7$ **d)** $f(x) = -x$

e) $f(x) = 3x + 2$ **f)** $f(x) = \frac{4}{5}x + \pi$

Solución .-

a) Por ser una función constante, $f\,'(x) = 0$.
b) Es la función identidad, entonces $f\,'(x) = 1$.
c) $f\,'(x) = (x + 7)' = x\,' + 7\,' = 1 + 0 = 1$.
d) $f\,'(x) = (-x)\,' = ((-1)x)\,' = (-1)x\,' = -1$.
e) $f\,'(x) = (3x + 2)\,' = (3x)\,' + 2\,' = 3x\,' + 2\,' = 3$
f) $f\,'(x) = (\frac{4}{5}x + \pi)' = \frac{4}{5}$

DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

Recordemos que, si f y g son dos funciones reales, se define el producto, $f\,g$, como :

1.- $Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g)$
2.- $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall\, x \in Dom(fg)$

Supongamos que f y g son derivables en a . La derivada del producto no coincide con el producto de las derivadas.
Para obtener su expresión aplicaremos que un número no se altera cuando se le suma y resta una misma cantidad.

$$(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a) + f(x)g(a) - f(x)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))g(a) + f(x)(g(x) - g(a))}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(a) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right] =$$

$$= f\,'(a)g(a) + f(a)g\,'(a) \,.$$

En consecuencia, si f y g son derivables su producto también lo es , y

$$\boxed{(fg)'(x) = f\,'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Observación.- En la demostración anterior, hemos utilizado que derivabilidad implica continuidad. ¿Dónde?

Ejemplo 17.1 **Hallar la función derivada de** $f(x) = x^2$.

Solución .- $f(x) = x \cdot x \;\Rightarrow\; f\,'(x) = x'\cdot x + x \cdot x' = 1\cdot x + x \cdot 1 = x + x = 2x$

Ejemplo 18.1 **Hallar las derivadas de las funciones** $f(x) = x^3$ **y** $g(x) = x^4$.

Solución .-

$$f(x) = x^2 \cdot x \;\Rightarrow\; f\,'(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}^2)'\cdot x + x^2 \cdot x' = 2\mathrm{x}\cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$g(x) = x^2 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; g'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}\cdot x^2 + x^2 \cdot 2x = 4x^3$$

Ejemplo 19.1 **Hallar la derivada del producto de tres funciones.**

Solución .- En términos funcionales, la derivada del producto de dos funciones, se escribe:

$$(fg)' = f\,'g + f\,g'$$

Para el caso de tres funciones, f, g y h, supongamos que $f\,g = F$. Entonces:

$$(f\,g\,h)' = (F\,h)' = F'\,h + F\,h' = (f\,g)'\,h + F\,h' = (f\,'g + f\,g')\,h + f\,g\,h' =$$
$$= f\,'g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'$$

Ejemplo 20.1 **Derivar, con esta fórmula, la función** $f(x) = x^3$.

Solución .- $f(x) = x \cdot x \cdot x \;\Rightarrow\; f\,'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}'\cdot x \cdot x + x \cdot x'\cdot x + x \cdot x \cdot x' =$

$$= 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$$

Los productos de más de tres funciones se tratan de forma análoga.
La fórmula general para la derivada de un producto de n funciones se escribe:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdot \ldots \cdot f_{i-1} \cdot f_i'\cdot f_{i+1} \cdot \ldots \cdot f_n$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL NATURAL

Recibe este nombre la función $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{Z}^+$, que no es más que el producto n veces de la función identidad, es decir,

$$f(x) = x \cdot x \cdot \overset{n)}{\ldots\ldots} \cdot x$$

Aplicando la fórmula para derivar un producto de n funciones, se tiene :

$$f'(x) = 1 \cdot x \cdot \overset{n-1)}{\ldots\ldots} \cdot x + x \cdot 1 \cdot \overset{n-1)}{\ldots\ldots} \cdot x + \overset{n)}{\ldots\ldots} + x \cdot x \cdot \overset{n-1)}{\ldots\ldots} \cdot 1 =$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + \overset{n)}{\ldots\ldots} + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

En definitiva, la función potencial natural es derivable en **R** :

$$\boxed{f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f\,'(x) = nx^{n-1}}$$

Ejemplo 21.1 **Derivar las siguientes funciones :**

a) $f(x) = x^{100}$ **b)** $f(x) = 4x^7$ **c)** $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$

Solución .- a) $f\,'(x) = 100x^{100-1} = 100x^{99}$

b) $f\,'(x) = 4 \cdot 7x^6 = 28x^6$

c) $f\,'(x) = 5 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 2x + 0 = 20x^3 - 6x^2 + 2x$

Como consecuencia, se tiene:

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

Toda función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

es derivable en **R**, siendo su derivada otro polinomio de grado n -1

$$f\,'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ldots + 2a_2x + a_1$$

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

DERIVADA DE UNA FUNCION

1.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^5-\frac{1}{3}x^3-7x+\frac{7}{8}$ b) $f(x) = 7x^6-2x^5-1$
c) $f(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$ d) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2-2x+\sqrt{3}$.

2.- Encontrar una función polinómica de segundo grado sabiendo que $f(0) = 3$, $f'(0) = -2$ y $f'(1) = 0$. **(S:** $f(x) = x^2-2x+3$**).**

3.-¿Qué relación existe entre las derivadas de las funciones $f(x) = (x-5)^2$ y $g(x) = 8-10x+x^2$?.

4.- Si f y g son dos funciones derivables tales que $f'(x)-g'(x) = 0$, ¿es posible que $f(x)-g(x) = 2$?. ¿Y $f(x)-g(x) = 5x$?.

5.- Sean las funciones $f(x) = x^2-2x+3$ y $g(x) = x^3-7x^2+20x-5$. Hallar un valor $x_0\in(1,4)$ verificando: $(f(4)-f(1))g'(x_0) = (g(4)-g(1))f'(x_0)$ **(S:** $x_0= 2$ **)**

6.- Se considera la función $f(x) = ax^2+bx+c$; $a\neq 0$. Si $n\in\mathbf{Z}^+$, encontrar un valor $x_0\in(-n,n)$ verificando: $f(n)-f(-n) = 2nf'(x_0)$. **(S:** $x_0= 0$ **)**

7.- Sea la función $f(x) = 2\sqrt{x} + x + c$; $c \in \mathbb{R}$. Encontrar un valor $x_0 \in (4, 16)$, verificando $f(16) - f(4) = 12f'(x_0)$. **(S:** $x_0 = 9$ **)**

8.- Hallar $f'(0)$ para la función dada por $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdot .....\cdot(x+10)$.
(S: 10! **)**

9.- Sean n y m dos números naturales, par e impar, respectivamente.
Determinar n y m en la función $f(x) = x^n + x^m$, sabiendo que $f'(1) = 7$ y $f'(-1) = 3$.
(S: $n = 2$ y $m = 5$ **)**

10.-Obtener un polinomio, $p(x)$, verificando $p'(x) = 3x^2+2x+1$ y $p(0) = gr(p(x))$.
(S: $p(x) = x^3+x^2+x+3$ **)**

11.-Hallar una función $f(x)$ que cumpla: $\frac{1}{x^2}\cdot(x\cdot f(x))' = \frac{f'(x)}{x}+2x$
(S: $f(x) = 2x^3$ **)**

12.- Dadas las funciones $f(x) = x^n$, $g(x) = x^{n-1}$ y $h(x) = x^{n-2}$, calcular los valores de a y n sabiendo que $(f(x)g(x)h(x))' = ax^8$.
(S: $n = 4$; $a = 9$ **)**

DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

2

El procedimiento mediante el cuál se obtiene la derivada de una función se conoce como **derivación.**
Llamaremos **funciones elementales** a las funciones polinómicas, racionales, irracionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
Nuestro objetivo es encontrar sus derivadas sin emplear límites.
Cualquier otra función se obtiene de éstas mediante suma, producto, división y composición.

DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones derivables. Queremos hallar la derivada de la función cociente, es decir, de la función

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se sobreentiende que x toma sólo los valores para los que f(x) y g(x) tienen sentido.

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)F(x) \Rightarrow f\,'(x) = g'(x)F(x) + g(x)F'(x)$$

Por lo tanto:

$$F'(x) = \frac{f\,'(x) - g'(x)F(x)}{g(x)} = \frac{f\,'(x) - g'(x)\cdot \frac{f(x)}{g(x)}}{g(x)} = \frac{g(x)f\,'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Es decir: "*denominador por la derivada del numerador, menos numerador por la derivada del denominador, partido por el cuadrado del denominador*".

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f\,'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Ejemplo 1.2 **Derivar las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **d)** $f(x) = x^{-1}$

<u>Solución</u> .- Basta con aplicar la fórmula para la derivada de un cociente y recordar la regla para derivar una función polinómica.

a) $f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

b) $f'(x) = \frac{(x+2)\cdot 2x - (x^2+1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$

c) $f'(x) = \frac{x^3\cdot 0 - 1\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f\,'(x) = \frac{x\cdot 0 - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Ejemplo 2.2 **Resolver el Ejemplo 6.1 sin utilizar límites.**

Solución .-

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Por tanto, $f'(1) = \frac{4}{4} = 1$.

Ejemplo 3.2 **Resolver el Ejemplo 7.1 sin utilizar límites.**

Solución .- $f(x) = \frac{m}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2\cdot 0 - m\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2mx}{x^4} = \frac{-2m}{x^3}$

De este modo: $f'(1) = 2 \Leftrightarrow -2m = 2 \Leftrightarrow m = -1$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL CON EXPONENTE NEGATIVO

Recibe este nombre la función $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbf{Z}^+$, que puede escribirse con exponente entero positivo en la forma

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$, siendo , obviamente Dom (f) = **R** - {0}.

Aplicando la fórmula para derivar un cociente y recordando la derivada de la función potencial natural, tendremos:

$$f'(x) = \frac{x^n\cdot 0 - 1\cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2-n}} = -n\cdot\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

De este modo, **la regla de derivación es la misma tanto si el exponente es positivo como negativo:**

$$\boxed{f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}}$$

Obsérvese que $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{Z}^+$ es derivable en **R** , pero $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbf{Z}^+$ es derivable en **R** - {0} .

Ejemplo 4.2 **Derivar la función** $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{x^4} + \frac{4}{x^5} - x + 6$

Solución .-

$f(x) = 4x^3 - 7x^{-4} + 4x^{-5} - x + 6 \;\Rightarrow\; f\,'(x) = 12x^2 + 28x^{-5} - 20x^{-6} - 1$

$\Rightarrow\; f\,'(x) = 12x^2 + \frac{28}{x^5} - \frac{20}{x^6} - 1$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN RAIZ CUADRADA

En el Ejemplo 11.1 se vio , mediante la definición de derivada, que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en $(0, +\infty)$, siendo $f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Veremos otro procedimiento en el que se utiliza la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; [f(x)]^2 = x \;\Rightarrow\; f(x)f(x) = x$$

Derivando los dos miembros de la última igualdad, se tiene:

$$f\,'(x)f(x) + f(x)f\,'(x) = 1 \;\Rightarrow\; 2f(x)f\,'(x) = 1 \;\Rightarrow\; f\,'(x) = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Ejemplo 5.2 **De forma análoga, hallar la derivada de la función** $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solución .- $f(x) = \sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; [f(x)]^3 = x \;\Rightarrow\; f(x)f(x)f(x) = x$

Derivando en los dos miembros

$$f\,'(x)f(x)f(x) + f(x)f\,'(x)f(x) + f(x)f(x)f\,'(x) = 1 \;\Rightarrow\; 3f\,'(x)[f(x)]^2 = 1$$

$$\Rightarrow\; f\,'(x) = \frac{1}{3[f(x)]^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Hemos obtenido la siguiente regla:

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

Ejemplo 6.2 **Generalizando, obtener la derivada de la función** $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Solución .- $f(x) = \sqrt[n]{x} \;\Rightarrow\; [f(x)]^n = x \;\Rightarrow\; f(x)f(x)\cdot\overset{n)}{\ldots\ldots\ldots}\cdot f(x) = x$

Derivando en ambos miembros como en los casos anteriores

$$f'(x)f(x)\cdot\overset{n-1)}{\ldots\ldots\ldots}\cdot f(x) + f(x)f'(x)\cdot\overset{n-1)}{\ldots\ldots\ldots}\cdot f(x) + \overset{n)}{\ldots\ldots\ldots} + f(x)f(x)\cdot\overset{n-1)}{\ldots\ldots\ldots}\cdot f'(x)=1$$

$$f'(x)[f(x)]^{n-1} + f'(x)[f(x)]^{n-1} + \overset{n)}{\ldots\ldots\ldots} + f'(x)[f(x)]^{n-1} = 1$$

$$nf'(x)[f(x)]^{n-1} = 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

Ejemplo 7.2 **Derivar la función** $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{x^4} + \sqrt[5]{x}$.

Solución .-

$$f(x) = 2x^3 - 3x^{-4} + \sqrt[5]{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 6x^2 + 12x^{-5} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \;\Rightarrow$$

$$f'(x) = 6x^2 + \frac{12}{x^5} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

DERIVADAS SUCESIVAS

Supongamos que la función f es derivable. Si, a su vez, f ' también lo es, a su derivada, (f ')' se le llama **derivada segunda** y se representa por f ''. En este caso, se dice que f es dos veces derivable.

Ejemplo 8.2 **¿Es dos veces derivable la función** $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 6$ **?**

Solución .- Toda función polinómica es derivable en **R** , siendo su derivada otro polinomio , y por tanto derivable nuevamente.
Así, toda función polinómica será dos veces derivable en **R** .
En este ejemplo:

$$f\,'(x) = 12x^2 - 14x \qquad \text{y} \qquad f\,''(x) = 24x - 14$$

No hay razón para detenerse en la derivada segunda. Podemos definir:

DERIVADA TERCERA	$(f\,'')' = f\,'''$
DERIVADA CUARTA	$(f\,''')' = f^{4)}$
....	....
....	....
DERIVADA n-ÉSIMA	$(f^{n-1)})' = f^{\,n)}$

Las derivadas sucesivas de f también se conocen como **derivadas de orden superior,** concretamente:

f ''	**DERIVADA DE ORDEN 2**
f '''	**DERIVADA DE ORDEN 3**
......	....
......	....
$f^{n)}$	**DERIVADA DE ORDEN n**

Ejemplo 9.2 **Calcular las derivadas sucesivas de** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$.

Solución .-

f '(x) = $4x^3 - 4x$ $\qquad f^{4)}(x) = 24$
f ''(x) = $12x^2 - 4$ $\qquad f^{5)}(x) = 0$
f '''(x) = 24x $\qquad f^{n)}(x) = 0\ ,\ \forall n \geq 5$

Ejemplo 10.2 **Hallar la derivada de orden cinco para la función** $f(x) = x^5$.

Solución .-

f '(x) = $5x^4$ $\qquad$ f '''(x) = $60x^2$ $\qquad f^{5)}(x) = 120$
f ''(x) = $20x^3$ $\qquad f^{4)}(x) = 120x$

En este tipo de ejercicios no conviene realizar las operaciones, sino dejarlas de forma indicada. Por ejemplo:

f '(x) = $5x^4$ $\qquad$ f '''(x) = $5 \cdot 4 \cdot 3x^2$ $\qquad f^{5)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
f ''(x) = $5 \cdot 4x^3$ $\qquad f^{4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x$

Existe un símbolo para los productos de factores que empiezan en n y acaban en 1. Es éste : n! , y se lee "factorial de n" . Por convenio , 0! = 1 .
Con esta notación, la solución del problema se expresa $f^{\,5)}(x) = 5!$.

Ejemplo 11.2 **Calcular la derivada n - ésima de** $f(x) = x^n$ **,** $n \in \boldsymbol{Z}^+$.

Solución .- Se calculan las derivadas sucesivas convenientes hasta encontrar una relación entre el orden de derivación, exponentes, coeficientes, etc.

f '(x) = nx^{n-1}
f ''(x) = $n(n-1)x^{n-2}$
f '''(x) = $n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
$f^{4)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

A la vista de los resultados, parece lógico pensar que, por ejemplo

$$f^{\,10)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ...... \cdot (n-9)x^{n-10}$$

Y por tanto: $f^{\,n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ..... \cdot (n-(n-1))x^{n-n} =$
$= n(n-1)(n-2) \cdot ..... \cdot 1 \cdot x^0 =$
$= n(n-1)(n-2) \cdot ..... \cdot 1 = n!$.

Ejemplo 12.2 **Hallar la derivada n-ésima de la función** $f(x)=\frac{1}{x}$.

Solución .- Las derivadas sucesivas de f se obtienen fácilmente si, previamente, expresamos f con exponente negativo: $f(x)=x^{-1}$.
Recordemos que ***no conviene realizar las operaciones:***

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1!}{x^2}$$

$$f''(x) = (-2)(-1)x^{-3} = \frac{2!}{x^3}$$

$$f'''(x) = (-3)(-2)(-1)x^{-4} = -\frac{3!}{x^4}$$

$$f^{4)}(x) = (-4)(-3)(-2)(-1)x^{-5} = \frac{4!}{x^5}$$

Se observa que las derivadas de orden impar son negativas y las de orden par positivas.
Parece lógico pensar que:

$$f^{10)}(x)=\frac{10!}{x^{11}} \qquad \text{y} \qquad f^{11)}(x)=-\frac{11!}{x^{12}}$$

Podemos deducir que:

$$f^{n)}(x)=\begin{cases} \dfrac{n!}{x^{n+1}} \; si\ n \text{ es par} \\ -\dfrac{n!}{x^{n+1}} \text{ si n es impar} \end{cases}$$

Esta expresión se puede sintetizar utilizando el factor $(-1)^n$ cuando aparezca la alternancia de signo del tipo - , + , - , ... ; y $(-1)^{n-1}$ ó $(-1)^{n+1}$ cuando la alternancia de signo que aparece es del tipo +, - , + , ...

En este caso

$$f^{n)}(x)=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$$

DERIVADA DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Si f es derivable en $a \in Dom(f)$ y g lo es en $f(a) \in Dom(g)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a , siendo:

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \cdot f'(a)$$

En general

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)}$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de **regla de la cadena.**

Comprobación.- Verificar esta regla con las funciones $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = x^2 + 2$.

Ejemplo 13.2 **Sea p la función potencial natural y sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función $F = p \circ f$.**

Solución .- Recordemos que la función potencial natural viene dada por la expresión p(x) = x^n , $n \in \mathbf{Z}^+$, siendo su función derivada p'(x) = nx^{n-1}.
De esta manera

$$F(x) = (p \circ f)(x) = p[f(x)] = [f(x)]^n$$

Si aplicamos la regla de la cadena

$$F'(x) = (p \circ f)'(x) = p'[f(x)] \cdot f'(x) = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

Obtenemos así la regla de derivación para la función potencial natural generalizada:

$$\boxed{F(x) = [f(x)]^n \;\Rightarrow\; F'(x) = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 14.2 **Derivar las siguientes funciones:**

a) $F(x) = (5x^2 - 1)^3$ **b)** $F(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2$

Solución .-

a) Aplicamos la última fórmula considerando que $f(x) = 5x^2 - 1$.

$$F'(x) = 3(5x^2 - 1)^2 \cdot 10x = 30x(5x^2 - 1)^2$$

b) Aplicaremos la misma fórmula teniendo presente que la base es un cociente de funciones.

$$F'(x) = 2\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{(x^2 - 1) \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-8x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

Ejemplo 15.2 **Calcular la derivada segunda de** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Solución .- Hemos visto en el ejemplo anterior que

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Para obtener f'' utilizaremos la derivada de un cociente de funciones, teniendo en cuenta el apartado a) del Ejemplo 14.2 a la hora de derivar el denominador.

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2 \cdot (-4) - (-4x) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{\left[(x^2 - 1)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{-4(x^2 - 1)[(x^2 - 1) - 4x^2]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4(-3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Ejemplo 16.2 **Hallar la derivada n-ésima de la función** $f(x) = (ax + b)^n$, $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \boldsymbol{Z}^+$

Solución .- Calculemos las derivadas sucesivas de f .

f '(x) = $n(ax+b)^{n-1}\cdot a = an(ax+b)^{n-1}$

f ''(x) = $an(n-1)(ax+b)^{n-2}\cdot a = a^2n(n-1)(ax+b)^{n-2}$

f '''(x) = $a^2n(n-1)(n-2)(ax+b)^{n-3}\cdot a = a^3n(n-1)(n-2)(ax+b)^{n-3}$

Podemos deducir, por ejemplo, que:

$$f^{10)}(x) = a^{10}n(n-1)(n-2)\cdot .....\cdot(n-9)(ax+b)^{n-10}$$

Y por inducción:

$$f^{n)}(x) = a^n n(n-1)(n-2)\cdot .....\cdot(n-(n-1))(ax+b)^{n-n} = a^n\cdot n!$$

Ejemplo 17.2 **Obtener la derivada n-ésima de** $f(x)=\frac{x-a}{x+a}$, $a\in \boldsymbol{R}$.

Solución .-

f '(x) = $\dfrac{(x+a)\cdot 1-(x-a)\cdot 1}{(x+a)^2} = \dfrac{2a}{(x+a)^2} = 2a(x+a)^{-2}$

f ''(x) = $2a\cdot(-2)(x+a)^{-3} = -2a\cdot 2(x+a)^{-3}$

f '''(x) = $-2a\cdot 2\cdot(-3)(x+a)^{-4} = 2a\cdot 2\cdot 3(x+a)^{-4}$

$f^{4)}(x) = 2a\cdot 2\cdot 3\cdot(-4)(x+a)^{-5} = -2a\cdot 2\cdot 3\cdot 4(x+a)^{-5}$

A la vista de los resultados, se deduce, por ejemplo que

$$f^{10)}(x) = -2a\cdot 10!\cdot(x+a)^{-11} = -\frac{2a\cdot 10!}{(x+a)^{11}}$$

$$f^{11)}(x) = 2a\cdot 11!\cdot(x+a)^{-12} = \frac{2a\cdot 11!}{(x+a)^{12}}$$

Y por inducción:

$$f^{n)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{2a \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} & \text{si n es par} \\ \dfrac{2a \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Ahora bién, como la alternancia de signo es del tipo +, - , +, ... , tendremos finalmente:

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2a \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{o también} \quad f^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2a \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Ejemplo 18.2 **Sea r la función raíz cuadrada y sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función $F = r \circ f$.**

Solución .- La función raíz cuadrada es r(x) = $\sqrt{x}$ y su función derivada es r'(x) = $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

La función F será F(x) = $(r \circ f)(x) = r[f(x)] = \sqrt{f(x)}$.
Según la regla de la cadena:

$$F'(x) = (r \circ f)'(x) = r'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

Hemos obtenido la regla de derivación para la función raíz cuadrada generalizada:

$$\boxed{F(x) = \sqrt{f(x)} \;\Rightarrow\; F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 19.2 **Derivar las siguientes funciones:**

a) $F(x) = \sqrt{2x^3 + 7x - 1}$ **b)** $F(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

<u>Solución</u> .-

a) Aplicando esta regla y recordando la derivada de un polinomio, se tiene:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+7x-1}} \cdot (6x^2+7) = \frac{6x^2+7}{2\sqrt{2x^3+7x-1}}$$

b) Aplicaremos la misma regla observando que en el radicando figura un cociente de funciones.

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{\frac{(1-x)^2(1+x)}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

Para el caso de tres funciones, la regla de la cadena se expresaría así:

$$(h\circ g\circ f)'(x) = h'\{g[f(x)]\}\cdot g'[f(x)]\cdot f'(x)$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Admitiremos que la derivada de la función seno es la función coseno, es decir:

$$\boxed{s(x) = sen\ x \quad \Rightarrow \quad s'(x) = \cos x}$$

Ejemplo 20.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función $F = s\circ f$, siendo s la función seno.**

<u>Solución</u> .- Utilizando esta última fórmula y la regla de la cadena, tenemos:

$$F'(x) = (s\circ f)'(x) = s'[f(x)]\cdot f'(x) = \cos f(x)\cdot f'(x)$$

Se obtiene, de esta forma, la regla de derivación para la función seno generalizada:

$$\boxed{F(x) = sen\ f(x) \ \Rightarrow\ F'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 21.2 **Derivar las siguientes funciones:**

a) $F(x) = sen\ 3x$ **b)** $F(x) = sen\ x^3$ **c)** $F(x) = 3sen\ x$

d) $F(x) = 3 + sen\ x$ **e)** $F(x) = sen^3 x$ **f)** $F(x) = sen^3 x^3$

<u>Solución</u> .-

a) Aplicamos la regla de derivación para la función seno generalizada, con f(x) = 3x.

$$F'(x) = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$$

b) Análogamente, siendo ahora f(x) = x^3.

$$F'(x) = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

c) Se trata del producto de una constante por una función. La derivada es el producto de la constante por la derivada de la función, es decir:

$$F'(x) = 3 \cdot \cos x = 3\cos x$$

d) La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas.

$$F'(x) = 0 + \cos x = \cos x$$

e) Como $sen^3 x = (sen\ x)^3$, debemos aplicar la regla de derivación para la función potencial natural generalizada, obteniendo:

$$F'(x) = 3(sen\ x)^2 \cdot \cos x = 3sen^2 x \cdot \cos x$$

f) Es una composición de los apartados e) y b) en este orden.

$$F(x) = sen^3 x^3 = (sen\ x^3)^3$$

$$F'(x) = 3(sen\ x^3)^2 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 9x^2 sen^2 x^3 \cos x^3$$

Para descubrir la **derivada de la función coseno** basta con aplicar la fórmula del Ejemplo 20.2 y recordar que el coseno se puede escribir en función del seno así:

$$c(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Por tanto:

$$c'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = sen\, x \cdot (-1) = -sen\, x$$

Es decir, **la derivada de la función coseno es la opuesta de la función seno**.

Ejemplo 22.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función $F = c \circ f$, siendo c la función coseno.**

<u>Solución</u> .- Hemos visto que c'(x) = -sen x. Aplicando la regla de la cadena

$$F'(x) = (c \circ f)'(x) = c'[f(x)] \cdot f'(x) = -sen\, f(x) \cdot f'(x)$$

Esta es la regla de derivación para la función coseno generalizada:

$$\boxed{F(x) = \cos f(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = -sen\, f(x) \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 23.2 **Hallar la derivada n-ésima de la función coseno.**

<u>Solución</u> .- Si calculamos las derivadas sucesivas no encontraremos relación alguna entre ellas:

c'(x) = -sen x
c''(x) = -cos x
c'''(x) = sen x
$c^{4)}(x) = \cos x$

A partir de la derivada de orden cuatro se repiten los resultados.

Se pueden encontrar relaciones si se expresan todos los resultados como coseno. Esto es posible recordando la fórmula trigonométrica

$$-sen\ x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Efectivamente:

$$c'(x) = -sen\ x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c''(x) = -sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left((x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c'''(x) = -sen\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Por inducción:

$$c^{n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Ejemplo 24.2 **Hallar la derivada de la función tangente.**

Solución .- La función tangente viene dada por $t(x) = \dfrac{s(x)}{c(x)} = \dfrac{sen\ x}{\cos x}$.
Por tratrarse de un cociente

$$t'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - sen\ x \cdot (-sen\ x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

pudiendo emplearse cualquiera de las dos expresiones, según convenga.

Ejemplo 25.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función** $F = t \circ f$**, siendo t la función tangente.**

Solución .- Aplicando la regla de la cadena y sabiendo que

$$t'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

obtenemos:

$$F'(x) = (t \circ f)'(x) = t'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) = (1 + tg^2 f(x)) \cdot f'(x)$$

Por consiguiente, la regla de derivación para la función tangente generalizada será:

$$\boxed{F(x) = tg\, f(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) = (1 + tg^2 f(x)) \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 26.2 **Derivar la función** $f(x) = \frac{1}{3} tg^3 x - tg\, x + x - 5.$

Solución .- Sólo la experiencia puede decirnos qué tipo de expresión conviene emplear para la derivada de la tangente.
En este caso, como la única función trigonométrica que aparece es la tangente, interesa utilizar la segunda expresión. Así:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3(tg\, x)^2 \cdot (1 + tg^2 x) - (1 + tg^2 x) + 1 = tg^2 x + tg^4 x - 1 - tg^2 x + 1 =$$

$$= tg^4 x \quad .$$

Ejemplo 27.2 **Hallar la derivada de la función cotangente.**

Solución .- Esta función se define como la inversa, respecto del producto, de la función tangente. Es decir:

$$\frac{1}{t}(x) = \frac{1}{tg\, x} = \frac{\cos x}{sen\, x}$$

Al ser un cociente

$$\left(\frac{1}{t}\right)'(x) = \frac{sen\, x \cdot (-sen\, x) - \cos x \cdot \cos x}{(sen\, x)^2} = \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x}$$

Obsérvese que

$$\frac{-sen^2x - \cos^2x}{sen^2x} = -\frac{sen^2x}{sen^2x} - \frac{\cos^2x}{sen^2x} = -1 - \cot^2x$$

Ejemplo 28.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función** $F = \frac{1}{t} \circ f$ **.**

Solución .-
Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y la regla de la cadena

$$\mathrm{F'(x)} = \left(\frac{1}{t} \circ f\right)'(x) = \left(\frac{1}{t}\right)'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{-1}{sen^2 f(x)} \cdot f'(x) = -(1 + \cot^2 f(x)) \cdot f'(x)$$

Tenemos así, la regla de derivación para la función cotangente generalizada.

$$\boxed{F(x) = \cot f(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = -\frac{1}{sen^2 f(x)} \cdot f'(x) = -(1 + \cot^2 f(x)) \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 29.2 **Derivar la función**

$$f(x) = \frac{\cot \frac{x}{2} - tg\, \frac{x}{2}}{(\cot \frac{x}{2} - tg\, \frac{x}{2})^2 - 4}$$

Solución .-

Si aplicaramos la regla de derivación para un cociente nos encontraríamos con cálculos tediosos.
Algunas veces, resulta más agradable simplificar la función antes de derivarla. En este caso, vamos a simplificar la expresión común al numerador y denominador de f(x). Haremos uso de las fórmulas para el seno y coseno del ángulo doble.

$$\cot \frac{x}{2} - tg\, \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{sen\, \frac{x}{2}} - \frac{sen\, \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - sen^2 \frac{x}{2}}{sen\, \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{sen\, \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2 \cos x}{2sen\, \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos x}{sen\, x} = 2 \cot x$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{2\cot x}{4\cot^2 x - 4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\cot x}{\cot^2 x - 1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2 sen\, x\cos x}{\cos^2 x - sen^2 x} = \frac{1}{4} tg\ 2x$$

Por último:

$$f\,'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2 = \frac{1}{2\cos^2 2x}$$

Ejemplo 30.2 **Derivar las funciones secante y cosecante.**

Solución .-

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec'(x) = \frac{-1\cdot(-sen\ x)}{\cos^2 x} = \frac{sen\ x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{sen\ x}{\cos x} = \sec x \cdot tg\ x$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{sen\ x} \Rightarrow \cos ec'(x) = \frac{-\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen\ x}\cdot\frac{\cos x}{sen\ x} = -\cos ec\ x \cdot \cot x$$

No daremos las reglas de derivación para las funciones secante y cosecante generalizadas. Estas funciones son de uso poco frecuente. En caso de necesidad se pueden expresar en términos de otras funciones.

Ejemplo 31.2 **Derivar la función** $f(x) = \sec^2 x + \text{cosec}^2\, x$.

Solución .-

Método 1 .- Empleando las derivadas de las funciones secante y cosecante.

f '(x) = 2sec x sec x tg x + 2cosec x (-cosec x cot x) =
$= 2(\sec^2 x \cdot tg\ x - \text{cosec}^2\, x\cdot \cot x)$

Método 2 .- Expresando f en términos de otras funciones.

$$f(x) = 1 + tg^2 x + 1 + \cot^2 x = 2 + tg^2 x + \cot^2 x$$

$$f\,'(x) = 2tg\ x\cdot(1 + tg^2 x) + 2\cot x\cdot(-1-\cot^2 x) =$$

$$= 2(tg\ x + tg^3 x - \cot x - \cot^3 x)$$

<u>Método 3</u> .- Expresando f en términos de otras funciones.

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{sen^2 x}$$

$$f\,'(x) = \frac{-2\cos x \cdot (-sen\,x)}{\cos^4 x} + \frac{-2sen\,x \cos x}{sen^4 x} = 2\left(\frac{sen\,x}{\cos^3 x} - \frac{\cos x}{sen^3 x}\right)$$

Puede comprobarse que las tres expresiones obtenidas son idénticas.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Recordemos que, si f es una función y f^{-1} su inversa con respecto a la composición, se verifica $f \circ f^{-1} = I$, siendo I la función identidad. Es decir:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Derivando ambos miembros y aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$f\,'[f^{-1}(x)] \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f\,'[f^{-1}(x)]}}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Se sobreentiende que nos referimos a las inversas con respecto a la composición: arco seno, arco coseno, arco tangente y arco cotangente.
Iremos recordando las propiedades de estas funciones estudiadas en cursos anteriores.

<u>FUNCIÓN SENO</u>	**<u>FUNCIÓN ARCO SENO</u>**
$s : \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$	$s^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
s(x) = sen x	$s^{-1}(x) = arc\ sen\ x$
Dom (s) = **R**	Dom $(s^{-1}) = [-1, 1]$
s'(x) = cos x	cos (arc sen x) = $\sqrt{1 - x^2}$

Queremos hallar la derivada de la función $s^{-1}(x)$.
Ahora bien:

$$(s^{-1})'(x) = \frac{1}{s'[s^{-1}(x)]} = \frac{1}{s'[arc\ sen\ x]} = \frac{1}{\cos(arc\ sen\ x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplo 32.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función $F = s^{-1} \circ f$.**

<u>Solución</u> .-

$$F(x) = (s^{-1} \circ f)(x) = s^{-1}[f(x)] = arc\ sen\ f(x)$$

$$F'(x) = (s^{-1} \circ f)'(x) = (s^{-1})'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$$

Obtenemos, así, la regla de derivación para la función arco seno generalizada.

$$\boxed{F(x) = arc\ sen\ f(x) \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)}$$

VALOR ABSOLUTO

Si $x \in \boldsymbol{R}$, el **valor absoluto** de x es un número real no negativo que se representa por $|x|$ y se define como sigue:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}}$$

Por ejemplo :

$|7| = 7$, $|0| = 0$, $|-5| = -(-5) = 5$, $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$,

$|\pi - 3| = \pi - 3$, $|e-3| = 3-e$, $|x^2| = x^2$. ¿Por qué ? .

Veamos más ejemplos:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & si \quad 1-x \geq 0 \\ -1+x & si \quad 1-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & si \quad x \leq 1 \\ -1+x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

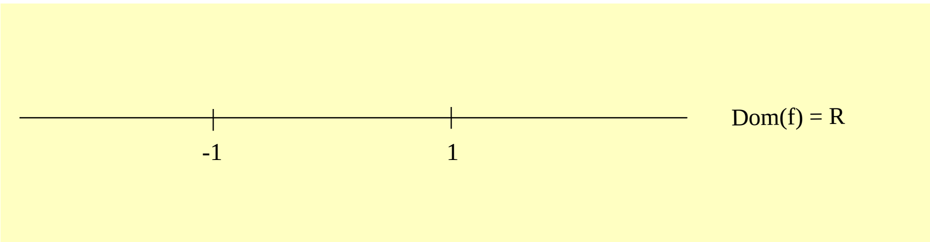
$$x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ -x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\tfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \; si \; x > 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

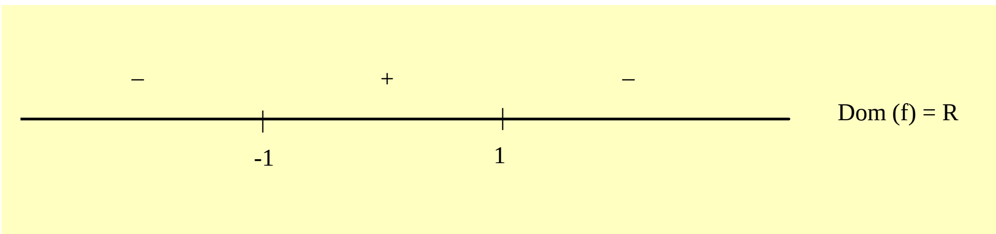
$|1+x^2| = 1+x^2$, porque $1+x^2 > 0 \;\; \forall x \in \boldsymbol{R}$.

$$|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad 1-x^2 \geq 0 \\ -1+x^2 & si \quad 1-x^2 < 0 \end{cases}$$

En este ejemplo, necesitamos conocer el signo de la función f(x) $=1-x^2$.
Para ello, representamos en su dominio los valores donde se anula:



A continuación, determinamos el signo de la función f(x) = $1-x^2$ dando a x un valor en cada intervalo, obteniendo:



Por lo tanto:

$$|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 \; si \quad x \in [-1, 1] \\ -1+x^2 \; si \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

En cursos anteriores se establece que $\sqrt{x^2} = x$; familiarmente, se dice "el cuadrado se va con la raíz cuadrada".
Esto se permite cuando se manejan conceptos matemáticos elementales , pero no es admisible cuando se realizan estudios superiores. En verdad

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

A partir de ahora, por ejemplo, $\sqrt{(1-x^2)^2} \neq 1-x^2$, sino que

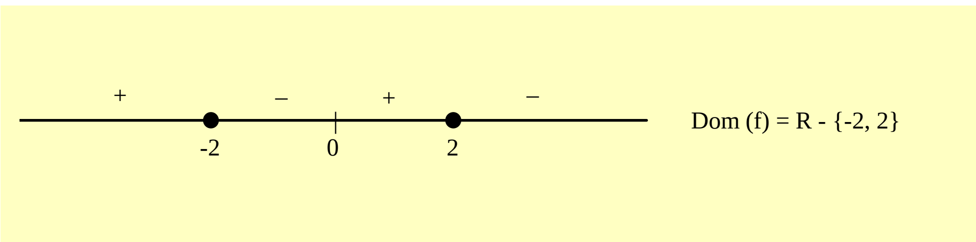
$$\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 \ si \ x \in [-1,1] \\ -1+x^2 \ si \ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

Ejemplo 33.2 **Calcular** $\sqrt{\dfrac{x^2}{(4-x^2)^2}}$.

<u>Solución</u> .-

$$\sqrt{\frac{x^2}{(4-x^2)^2}} = \sqrt{\left(\frac{x}{4-x^2}\right)^2} = \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

Necesitamos conocer el signo de la función f(x) = $\dfrac{x}{4-x^2}$.
Para ello, como en el ejemplo anterior, representamos en su dominio los valores donde se anula .
El signo de f(x) se determina dando a x un valor en cada intervalo y sustituyendo en f(x) .



Por lo tanto:

$$\left|\frac{x}{4-x^2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x}{4-x^2} & si \ \ x \in (-\infty,-2) \cup [0,2) \\ \dfrac{-x}{4-x^2} & si \ \ x \in (-2,0) \cup (2,+\infty) \end{cases}$$

Ejemplo 34.2 **Derivar la función** $F(x) = arc\ sen\ \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Solución .- Hay que aplicar la regla de derivación para la función arco seno generalizada, observando que f(x) es un cociente.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{(1+x^2)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{1+2x^2+x^4}}} \cdot \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\frac{|1-x^2|}{|1+x^2|}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{|1-x^2|}{1+x^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & si\ \ x \in (-1,1) \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & si\ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

Obsérvese que f '(x) no está definida si $x = \pm 1$.

FUNCIÓN COSENO	**FUNCIÓN ARCO COSENO**
$c : \boldsymbol{R} \to [-1,1]$	$c^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$
c(x) = cos x	$c^{-1}(x) = arc\ \cos\ x$
Dom (c) = **R**	Dom $(c^{-1}) = [-1,1]$
c'(x) = -sen x	sen (arc cos x) = $\sqrt{1-x^2}$

Para hallar la derivada de $c^{-1}(x)$ aplicaremos la fórmula para la derivada de la función inversa:

$$(c^{-1})'(x) = \frac{1}{c'[c^{-1}(x)]} = \frac{1}{c'[arc\ \cos\ x]} = \frac{1}{-sen(arc\ \cos\ x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como en los ejemplos anteriores, se puede deducir la siguiente regla de derivación:

$$\boxed{F(x) = arc\ \cos\ f(x) \Rightarrow F'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)}$$

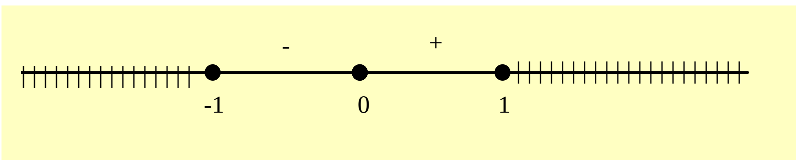
Ejemplo 35.2 **Hallar la derivada de la función** $F(x) = arc\ \cos\sqrt{1-x^2}$.

<u>Solución</u> .-

$$F'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

Para que f ' esté definida deberá ser $1-x^2>0$ y $x\neq 0$, es decir, que $x \in (-1,1)-\{0\}$.



Por lo tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & si \quad x \in (0,1) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & si \quad x \in (-1,0) \end{cases}$$

FUNCIÓN TANGENTE

$t : Dom\ (t) \rightarrow \boldsymbol{R}$

t(x) = tg x

Dom (t) = $\boldsymbol{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ \text{n} \in \boldsymbol{Z}\right\}$

t'(x) = $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

FUNCIÓN ARCO TANGENTE

$t^{-1} : \boldsymbol{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$t^{-1}(x) = \text{arc tg x}$

Dom $(t^{-1}) = \mathbf{R}$

tg (arc tg x) = x

Para hallar la derivada de la función t^{-1} utilizaremos el mismo procedimiento que para las funciones s^{-1} y c^{-1} .

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{t'[t^{-1}(x)]} = \frac{1}{t'[arc\ tg\ x]} = \frac{1}{1 + tg^2(arc\ tg\ x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

La correspondiente regla de derivación sería:

$$\boxed{F(x) = arc\ tg\ f(x)\ \Rightarrow\ F'(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2} \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 36.2

a) Comprobar que las siguientes funciones tienen igual derivada.

b) ¿Son iguales las funciones?. ¿Cómo son?.

$$f_1(x) = arc\ tg\ \frac{1+x}{1-x} \qquad f_2(x) = 2arc\ tg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \qquad f_3(x) = arc\ tg\ x$$

<u>Solución</u> .-

a) $f_1'(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \dfrac{2}{2+2x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f_2'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\left(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\right)} \cdot \frac{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

b) Sean f y g dos funciones derivables en (a, b) con igual derivada.
En dicho intervalo, se verifica:

(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0

Las únicas funciones con derivada nula son las funciones constantes, así que (f - g)(x) = C , $C \in \boldsymbol{R}$.
De manera que dos funciones con igual derivada no tienen por qué ser iguales, sino que se diferencian en una constante.
También se puede escribir f(x) = g(x) + C , y decir que f y g son "casi iguales", o iguales salvo constante.
En definitiva, las funciones $f_1,\ f_2\ y\ f_3$ son "casi iguales", se diferencian en constantes.

<u>**FUNCIÓN COTANGENTE**</u>	<u>**FUNCIÓN ARCO COTANGENTE**</u>
cot : Dom (cot)→ $\boldsymbol{R}$	$\cot^{-1} : \boldsymbol{R} \to (0,\pi)$
cot (x) = cot x	$\cot^{-1}(x) =$ arc cot x
Dom (cot) = $\mathbf{R} - \{n\pi\ ;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$	Dom $(\cot^{-1}) = \boldsymbol{R}$
cot'(x) = $\frac{-1}{sen^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	cot (arc cot x) = x

$$(\cot^{-1})'(x) = \frac{1}{\cot'[\cot^{-1}(x)]} = \frac{1}{\cot'[arc\ \cot\ x]} = \frac{1}{-(1+\cot^2(arc\ \cot\ x))} =$$

$$= \frac{-1}{1+x^2}\ .$$

Se deduce con facilidad la regla de derivación:

$$\boxed{F(x) = arc\ \cot\ f(x)\ \Rightarrow\ F'(x) = \frac{-1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)}$$

Ejemplo 37.2 **Comprobar que la siguiente función tiene la misma derivada que una de las funciones elementales. ¿Cuál?.**

$$F(x) = 2arc\ \cot\ \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Solución</u> .-

$$F'(x) = 2\cdot\frac{-1}{1+\dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{-1}{\dfrac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2+x^2}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{-1}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{-1}{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

que es la derivada de la función ***arco coseno*** .

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Sea L la función **logarítmica neperiana** , es decir , L(x) = ln x , siendo Dom (L) = $(0,+\infty)$.
Admitiremos que su función derivada vale

$$\boxed{L'(x) = \frac{1}{x}}$$

Ejemplo 38.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función $F = L \circ f$.**

Solución .-

$$\mathrm{F(x)} = (L \circ f)(x) = L[f(x)] = \ln f(x)$$
$$\mathrm{F'(x)} = L'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

De modo que:

$$\boxed{F(x) = \ln f(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Ejemplo 39.2 **Hallar la derivada de** $F(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}}$.

Solución .-

Método 1 .- Aplicando directamente la regla de derivación.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}}} \cdot \frac{(1-tg\,x)(1+tg^2x)+(1+tg\,x)(1+tg^2x)}{(1-tg\,x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}} \cdot \frac{(1+tg^2x)\cdot 2}{(1-tg\,x)^2} = \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x} = \frac{1}{\cos^2x - sen^2x} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec\ 2x$$

<u>Método 2</u> .- Utilizando las propiedades de los logaritmos para simplificar, previamente, la función.

$$F(x) = \ln\left(\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}}\cdot\frac{(1-tg\,x)(1+tg^2x)+(1+tg\,x)(1+tg^2x)}{(1-tg\,x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tg\,x}\cdot\frac{(1+tg^2x)\cdot 2}{1-tg\,x} = \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x} = \sec\ 2x$$

<u>Método 3</u> .- Simplificando la función mediante cálculos trigonométricos y logarítmicos.

$$\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x} = \frac{1+\frac{sen\,x}{\cos\,x}}{1-\frac{sen\,x}{\cos\,x}} = \frac{\cos x + sen\,x}{\cos x - sen\,x}$$

$$F(x) = \ln\left(\frac{\cos x+sen\,x}{\cos x-sen\,x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\cos x+sen\,x}{\cos x-sen\,x} =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\cos x+sen\,x)-\ln(\cos x-sen\,x)]$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{-sen\,x+\cos x}{\cos x+sen\,x} - \frac{-sen\,x-\cos x}{\cos x-sen\,x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x-sen\,x}{\cos x+sen\,x}+\frac{\cos x+sen\,x}{\cos x-sen\,x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\cos x-sen\,x)^2+(\cos x+sen\,x)^2}{\cos^2x-sen^2x}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\cos 2x} = \sec 2x$$

Para calcular la derivada de cualquier otra función logarítmica, basta con transformarla en una neperiana mediante la ***fórmula del cambio de base.***

$$F(x) = \log_a f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln f(x)$$

Como el primer factor es constante, entonces

$$F'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Ejemplo 40.2 **Derivar la función** $F(x) = \log_5 \sqrt[3]{7x}$.

Solución .-

$$F(x) = \log_5 (7x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 (7x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln 7x}{\ln 5} = \frac{1}{3 \ln 5} \cdot \ln 7x$$

$$F'(x) = \frac{1}{3 \ln 5} \cdot \frac{1}{7x} \cdot 7 = \frac{1}{x \ln 125}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Sea E la función **exponencial neperiana** , es decir, $E(x) = e^x$, donde Dom (E) = **R** .
Como esta función es la inversa de la logarítmica neperiana, $E = L^{-1}$, podemos aplicar la regla para la derivada de la función inversa:

$$E'(x) = (L^{-1})'(x) = \frac{1}{L'[L^{-1}(x)]} = \frac{1}{L'[e^x]} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x = E(x)$$

De manera que la función exponencial neperiana coincide con su derivada.

Ejemplo 41.2 **Sea f una función derivable. Hallar la derivada de la función** $F = E \circ f$ **.**

Solución .-

$$F(x) = (E \circ f)(x) = E[f(x)] = e^{f(x)}$$
$$F'(x) = E'[f(x)] \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Tenemos, así, la regla de derivación para la función exponencial neperiana generalizada:

$$\boxed{F(x) = e^{f(x)} \Rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 42.2 **¿Existen más funciones que coincidan con su derivada?.**

Solución .- Sí, por ejemplo, las funciones

$$f(x) = e^{x+5} \Rightarrow f'(x) = e^{x+5} \cdot 1 = e^{x+5}$$
$$f(x) = 7e^{x} \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot e^{x} = 7e^{x}$$

Las únicas funciones que cumplen esta propiedad son de la forma f(x) = $e^{x+C} = k \cdot e^{x}$, C , k $\in \mathbb{R}$.

Ejemplo 43.2 **Hallar la derivada n-ésima de** $f(x) = (a+bx)e^{a+bx}$ **;** $a, b \in \mathbb{R}$**.**

Solución **.-**

f '(x) = $be^{a+bx} + (a+bx)e^{a+bx} \cdot b = be^{a+bx}(1+a+bx)$
f ''(x) = $b[e^{a+bx} \cdot b(1+a+bx) + e^{a+bx} \cdot b] = b^2 e^{a+bx}(2+a+bx)$
f '''(x) = $b^2[e^{a+bx} \cdot b(2+a+bx) + e^{a+bx} \cdot b] = b^3 e^{a+bx}(3+a+bx)$

Por inducción: $f^{n)}(x) = b^n e^{a+bx}(n+a+bx)$

Sea a>0 y a≠ 1 . Designaremos por L_a a la función logarítmica de base a , es decir, $L_a(x) = \log_a x$.
Hemos visto anteriormente que

$$L_a'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Sea E_a la función exponencial de base a, o sea, $E_a(x) = a^x$. Como $E_a = L_a^{-1}$, tendremos:

$$E_a'(x) = (L_a^{-1})'(x) = \frac{1}{L_a'[L_a^{-1}(x)]} = \frac{1}{L_a'[a^x]} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{a^x}} = a^x \cdot \ln a$$

y, aplicando la regla de la cadena, tendríamos:

$$\boxed{F(x) = a^{f(x)}\ ,\ a > 0\ ,\ a \neq 1 \Rightarrow F'(x) = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)}$$

Ejemplo 44.2 **Hallar la derivada de la función** $F = L_2 + L_3 + E_5$.

Solución .- Se trata de la función F(x) = $\log_2 x + \log_3 x + 5^x$.

F'(x) = $\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x} + 5^x \cdot \ln 5 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3}\right) + 5^x \ln 5$

Ejemplo 45.2 **Derivar la función** $F(x) = 3^{\sqrt{x^2+x}} + \log_2(sen\ x)$.

Solución .-

F'(x) = $3^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1) + \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{sen\ x} \cdot \cos x =$

$= 3^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{\ln 2} \cdot \cot x$

Ejemplo 46.2 **Hallar la derivada n-ésima de** E_7 .

Solución .- $E_7(x) = 7^x$

$$E_7'(x) = 7^x \cdot \ln 7 = \ln 7 \cdot 7^x$$
$$E_7''(x) = \ln 7 \cdot 7^x \cdot \ln 7 = (\ln 7)^2 \cdot 7^x$$
$$E_7'''(x) = (\ln 7)^2 \cdot 7^x \cdot \ln 7 = (\ln 7)^3 \cdot 7^x$$

Por inducción: $E_7^{n)}(x) = (\ln 7)^n \cdot 7^x$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL-EXPONENCIAL

Recibe el nombre de función potencial-exponencial toda función de la forma

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

es decir, aquella en la que figuran , tanto en la base como en el exponente funciones no constantes.

Obsérvese la diferencia entre las siguientes funciones:

f(x) = x^3 **FUNCIÓN POTENCIAL**

f(x) = 3^x **FUNCIÓN EXPONENCIAL**

f(x) = x^x **FUNCIÓN POTENCIAL-EXPONENCIAL**

Para obtener su derivada se emplea el método conocido como ***derivación logarítmica***, que consta de los siguientes pasos:

P1.- <u>Sacar o tomar logaritmos</u>.

$$\ln f(x) = \ln g(x)^{h(x)}$$

$$\ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$$

P2.- <u>Derivar los dos miembros de la igualdad.</u>

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

P3.- <u>Despejar f '(x)</u>.

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[h'(x) \cdot \ln g(x) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)} \right]$$

P4.- <u>Sustituir f(x) por su valor</u>.

$$f'(x) = g(x)^{h(x)} \cdot \left[h'(x) \cdot \ln g(x) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)} \right] =$$

$$= g(x)^{h(x)} \cdot h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot g(x)^{h(x)-1} \cdot g'(x)$$

El primer sumando corresponde a la derivada de una función exponencial y el segundo a la de una función potencial.

Ejemplo 47.2 **Derivar la función** $f(x) = x^x$.

Solución .- Es una función potencial-exponencial, por lo tanto hay que emplear la derivación logarítmica.

P1.- $\ln f(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x$

P2.- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

P3.- $f'(x) = f(x)(\ln x + 1)$

P4.- $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

Ejemplo 48.2 **Derivar la función** $f(x) = (sen\ x)^{\cos x}$.

Solución .-

P1.- $\ln f(x) = \cos x \ln (sen\ x)$

P2.- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -sen\ x \cdot \ln(sen\ x) + \cos x \cdot \dfrac{1}{sen\ x} \cdot \cos x =$

$= -sen\ x \cdot \ln(sen\ x) + \dfrac{\cos^2 x}{sen\ x}$

P3.- $f'(x) = f(x)\left[-sen\ x \cdot \ln(sen\ x) + \dfrac{\cos^2 x}{sen\ x}\right]$

P4.- $f'(x) = (sen\ x)^{\cos x}\left[-sen\ x \cdot \ln(sen\ x) + \dfrac{\cos^2 x}{sen\ x}\right]$

Ejemplo 49.2 **Derivar la función** $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

Solución .- Aunque no lo parezca es una función potencial-exponencial, ya que

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

P1.- $\ln f(x) = \dfrac{1}{x} \ln x$

P2.- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{1}{x^2} \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}(-\ln x + 1)$

P3.- $f'(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

P4.- $f'(x) = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$

Mediante la derivación logarítmica se puede obtener la derivada de la función potencial real, es decir, de la función

$$f(x) = x^a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

En efecto:

P1.- $\ln f(x) = a \ln x$

P2.- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = a \cdot \frac{1}{x}$

P3.- $f'(x) = a \cdot \dfrac{f(x)}{x}$

P4.- $f'(x) = a \cdot \dfrac{x^a}{x} \Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

Ejemplo 50.2 **Derivar las funciones** $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, $g(x) = x^e$, $h(x) = x^\pi$.

Solución .-

$$f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1},\ g'(x) = ex^{e-1},\ h'(x) = \pi x^{\pi-1}$$

Ejemplo 51.2 **Derivar la función** $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{(1+x^4)^7}$.

Solución .-

Método 1 .- Empleando las reglas de derivación ya conocidas.

$$f'(x) = \frac{(1+x^4)^7 \cdot [2x\cos x + x^2(-sen\ x)] - x^2\cos x \cdot 7(1+x^4)^6 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^{14}} =$$

$$= \frac{(1+x^4)^6[(1+x^4)(2x\cos x - x^2 sen\ x) - 28x^5\cos x]}{(1+x^4)^{14}} =$$

$$= \frac{(1+x^4)(2x\cos x - x^2 sen\ x) - 28x^5\cos x}{(1+x^4)^8}$$

Método 2 .- Aunque no se trate de una función potencial-exponencial, se puede emplear la derivación logarítmica.

P1.- $\ln f(x) = \ln(x^2 \cos x) - \ln(1+x^4)^7 =$
$= \ln x^2 + \ln \cos x - 7\ln(1+x^4) =$
$= 2\ln x + \ln \cos x - 7\ln(1+x^4)$

P2.- $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} - \frac{sen\, x}{\cos x} - \frac{28x^3}{1+x^4}$$

P3.- $$f'(x) = f(x)\left[\frac{2}{x} - \frac{sen\, x}{\cos x} - \frac{28x^3}{1+x^4}\right]$$

P4.- $$f'(x) = \frac{x^2 \cos x}{(1+x^4)^7}\left[\frac{2}{x} - \frac{sen\, x}{\cos x} - \frac{28x^3}{1+x^4}\right] =$$

$$= \frac{2x\cos x}{(1+x^4)^7} - \frac{x^2 sen\, x}{(1+x^4)^7} - \frac{28x^5 \cos x}{(1+x^4)^8}$$

Ejemplo 52.2 **Mediante derivación logarítmica deducir la regla de derivación para la función F(x) = f(x)g(x)h(x) .**

<u>Solución</u> .-

Se trata de hallar la derivada de un producto de tres funciones, cuyo resultado ya es conocido.

P1.- $\ln F(x) = \ln f(x) + \ln g(x) + \ln h(x)$

P2.- $$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

P3.- $$F'(x) = F(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}\right]$$

P4.- $$F'(x) = f(x)g(x)h(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}\right] =$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

****

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

D E R I V A D A S

1.- Derivar y simplificar la función $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}}$ hasta obtener una de las funciones elementales.

2.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = xe^{2x}$ **.**

3.- ¿Qué signo tiene la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} arc\ tg \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$?.

4.- ¿Es cierto que la derivada de cualquier función trigonométrica es también trigonométrica?.

5.- Derivar la función $f(x) = e^x + x^e + x^x$.

6.- Dadas las funciones $f(x) = tg\frac{\pi x}{8}$ y $g(x) = 1 - sen\frac{\pi x}{2}$, calcular $f'(2)g'(2)$.

7.- Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + arcsen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.- Halla la derivada n-ésima de la función $f'(x) = e^{-x} + e^{2x}$.

9.- Se considera la función $f(x) = (Ax+B)sen\,x + (Cx+D)cos\,x$, donde A, B, C y D son constantes. Halla sus valores para que $f'(x) = sen\,x - cos\,x$.

10.-Obtener la derivada de la función $f(x) = (tgx)^{arctgx}$.

11.-Demostrar que la función $f(x) = 2arc\ tg\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}$ tiene, en el intervalo $(0,\pi)$**,** la misma derivada que la función identidad.
¿Para qué valores de x sus derivadas son opuestas?

12.-Calcular $f^{1234)}(x)$ y $f^{n)}(x)$ para la función $f(x) = cos\,x$.

13.-¿Es constante la función $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$?.

14.-Hallar $f'(1)$ si $f(x) = x^{x-1}$.

15.-Escribir tres funciones, no nulas, que coincidan con su derivada.

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

D E R I V A D A S

16.- Comprobar que las siguientes funciones tienen la misma derivada:

$$f(x) = arc\ sen\, x^2 \qquad g(x) = -2arc\ tg\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

17.- De un polinomio de tercer grado, *p(x)* , se sabe que p(1) = 0, p'(1) = 2 , p''(1) = 4 y p'''(1) = 12 . Calcular p(2) .

18.- Dada la función $f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$, se pide:

a) Comprobar que no existe ningún valor de x que anule su primera derivada.
b) ¿Para qué único valor se anula la derivada segunda?.

19.- Determinar el valor de *m* para que la función $f(x) = e^{-x} \cdot x^m$ tenga la derivada nula para x = 2.

20.- Se considera la función $f(x) = arcsen\dfrac{2x}{1+x^2} - 2arctg\, x$. Se pide:
a) Demostrar que es constante si $x \in (-1, 1)$.
b) Hallar su derivada si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

21.- Se consideran las siguientes funciones:

$$f(x) = -4arctg\, x \qquad g(x) = arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2arctg\, x$$

Se pide:
a) La función derivada de f .
b) Demostrar que g es constante $\forall x \in (0, +\infty)$.
c) ¿Para qué valores de x tienen igual derivada?.

22.- Se considera la función $f(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$, $a, b, k \in \mathbb{R}$.
Calcular los valores de k para los que se cumple $f''(x) = f(x)$.

23.- En la función f(x) = sen Ax + xcos Bx , A, B $\in \mathbb{R}$, hallar valores de A y B para que f '(x) = 1 + cos x .

24.- Hallar la derivada n-ésima de la función f(x) = $x \cdot e^{3+5x}$.

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

D E R I V A D A S

25.- Comprobar que las siguientes funciones tienen igual derivada

$$f(x) = \text{arc sen } x \qquad g(x) = arc\ tg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

26.- Dada la función $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2arc\ tg\frac{1-x}{1+x}$, demostrar que $f\,'(x) = \frac{p(x)}{(x^2+1)^2}$,
siendo $p(x)$ un polinomio de segundo grado que se determinará.

27.- Hallar la derivada n-ésima de la función $f(x) = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$ $\quad a \in \mathbb{R}$.

28.- Derivar la función $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$.

29.- Se consideran las funciones

$$f_1(x) = arc\,tg\,x \qquad y \qquad f_2(x) = arc\,tg\frac{2+x}{1-2x}$$

Se pide:

a) Comprobar que tienen igual derivada.
b) ¿Deberán ser iguales las funciones?.

30.- Derivar la función f(x) = $x^{arc\,sen\,x}$.

31.- Dada la función y = xcos x + sen x - 3 , calcular $y^{4)}$ + 2y'' + y .

32.- Encontrar un polinomio de tercer grado tal que p(0) = p(1) = -2 , p'(0) = -1 y p''(0) =10.

33.- Hallar una función, f , sabiendo que es potencial natural y $x^2 f\,''(x) + xf\,'(x) = f(x)$.

34.- Encontrar f(x) si f '(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x + 1$ y f(4) = 0 .

35.- Dar dos funciones polinómicas, f y g , de grados distintos tales que f '(1) = g '(1) .

36.- Comprobar que la siguiente función tiene igual derivada que la función identidad:

$$f(x) = -arc\ tg\ \frac{sen\ x + cos\ x}{sen\ x - cos\ x}$$

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

<u>Bachillerato</u>:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

D E R I V A D A S

37.- Se consideran las siguientes funciones:

$$f(x) = arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -arc\,sen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Se pide:

a) Comprobar que f '(x) = g '(x) $\forall x \in (-\infty, 0)$.
b) ¿Qué función elemental tiene, también, esta derivada?.

38.- Comprobar que si f(x) = arc sen (cos x) , entonces f '(x) = 1 , $\forall\, x \in (\pi, 2\pi)$.

39.- Derivar la función f(x) = $\left(\frac{x}{6}\right)^{6x}$.

40.- Se consideran las funciones f(x) = arc cos$\sqrt{\frac{1+sen\,x}{2}}$ y g(x) = $\frac{x}{2}$.

a) Comprobar que f '(x) = g '(x) $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

b) ¿Qué puede decirse de f y g ?.

41.- Derivar la función f(x) = $\sqrt[3]{arc\ \cot\ x}$.

42.- Se consideran las funciones

$$f(x) = arc\,sen\frac{4x}{4+x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2arc\,tg\frac{x}{2}$$

Se pide:

a) Calcular $(4+x^2)^2$ y $(4-x^2)^2$.
b) Utilizar los resultados anteriores para simplificar f '(x) .
c) Comprobar que f '(x) = –g '(x) $\forall\, x \in (\sqrt{2}\,, +\infty)$.
d) ¿En qué intervalo coinciden las derivadas de ambas funciones?.

43.- Demostrar que la función f(x) = $arc\,sen(\frac{x-2}{2}) - 2arc\,sen\frac{\sqrt{x}}{2}$ es constante en su dominio.

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

D E R I V A D A S

44.- a) Dada la función f(x) = x^2e^x , comprobar que $f^{5)}(x)=P(x)e^x$, siendo P(x) un polinomio de segundo grado que debe obtenerse.

b) ¿Ocurrirá lo mismo con $f^{100)}(x)$?. Razona la respuesta.

45.- Se consideran las funciones f(x) = $\frac{x+(x+n)}{2}$ y g(x) = $\sqrt{x(x+n)}$, donde $n \in \mathbb{N}$.
Demostrar que g'(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}$.

46.- En la función f(x) = (Ax + B)senx + (Cx + D)cosx , hallar valores para las constantes A, B, C y D de manera que f '(x) = xsenx .

47.- Sean f y g dos funciones derivables que verifican:

2f(0) = 1	f '(0) = 4g(0)
f(0)g(0) = 2	g '(0) = 2g(0)

Calcular h '(0), siendo h(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}$.

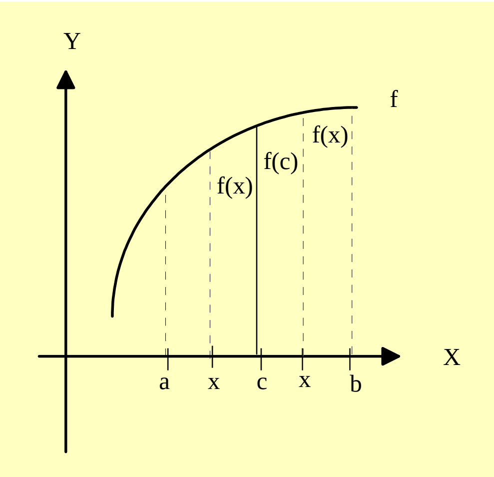
48.- Comprobar que si f(x) = $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$, entonces f '(x) = 8x .

49.- Sean f y g dos funciones derivables que verifican $f'(x)=g(x)$ y $g'(x)=f(x)$.
Se pide:
a) Hallar la derivada de la función $h(x)=g^2(x)-f^2(x)$. ¿Qué puede decirse sobre h ?.
b) Calcular $(f+g)^{n)}(x)$.
c) Hallar la derivada de la función $F(x)=ln(f(x)+g(x))$.

APLICACIONES DE LA DERIVADA 3

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) y $c \in (a, b)$.



Intuitivamente, para que f sea creciente en el punto c , deben cumplirse dos requisitos:

I.- Los puntos de abscisa x , situados entre a y c, tendrán una ordenada f(x) menor que la ordenada del punto c.

II.- Los puntos de abscisa x, situados entre c y b, tendrán una ordenada f(x) mayor que la ordenada del punto c.

Diremos, por tanto, que f es **creciente** en el punto c si se verifican, simultáneamente, las siguientes condiciones:

I.- $x < c \Rightarrow f(x) < f(c)\ ,\ \forall x \in (a, c)$
II.- $x > c \Rightarrow f(x) > f(c)\ ,\ \forall x \in (c, b)$

que también se pueden expresar de esta forma:

I.- $x - c < 0 \Rightarrow f(x) - f(c) < 0$
II.- $x - c > 0 \Rightarrow f(x) - f(c) > 0$

Estas dos condiciones se pueden sintetizar en una sola: $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.

Supongamos que f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Una condición suficiente para que f sea creciente en c es que f '(c) > 0

En efecto:

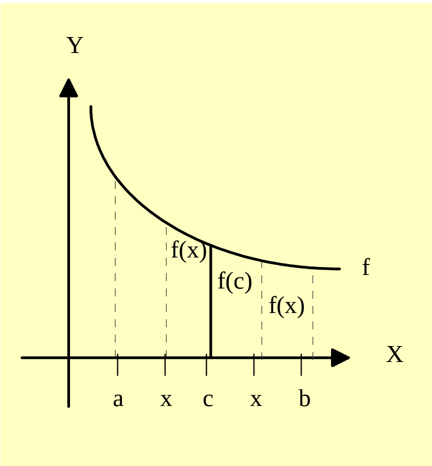
$$f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \quad \textit{si } \text{x está próximo a c}$$

$\Rightarrow$ f es creciente en c .

Ejemplo 1.3 **La función s(x) = sen x , ¿es creciente en c = $\frac{\pi}{4}$?.**

<u>Solución</u> .-

$$s'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad s'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{s es creciente en } \frac{\pi}{4}$$



Intuitivamente, para que f sea decreciente en el punto c , deben cumplirse dos requisitos:

I.- Los puntos de abscisa x , situados entre a y c, tendrán una ordenada f(x) mayor que la ordenada del punto c.

II.- Los puntos de abscisa x, situados entre c y b, tendrán una ordenada f(x) menor que la ordenada del punto c.

Diremos, por tanto, que f es **decreciente** en el punto c si se verifican, simultáneamente, las siguientes condiciones:

I.- $x < c \Rightarrow f(x) > f(c)\ ,\ \forall x \in (a,c)$
II.- $x > c \Rightarrow f(x) < f(c)\ ,\ \forall x \in (c,b)$

que son equivalentes a decir que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$.

Supongamos que f es derivable en el intervalo abierto (a, b) .

Una condición suficiente para que f sea decreciente en c es que f '(c) < 0

Ejemplo 2.3 **Comprobar que $f(x)=\frac{1}{x}$ es decreciente en c = 2 .**

Solución .-

f '(x) = $-\frac{1}{x^2}$ ⇒ f'(2) = $-\frac{1}{4}<0$ ⇒ f es decreciente en c = 2 .

Ejemplo 3.3 **Estudiar para qué valores de x son crecientes o decrecientes las siguientes funciones:**

a) $f(x)=x^2$ **b)** $f(x)=x^3+5$ **c)** $f(x)=x^2-2x$
d) $f(x)=x$ **e)** $f(x)=sen\,x$ **f)** $f(x)=\frac{1}{x}$

Solución .- Hay que determinar el signo de f '(x) en los puntos en los que f sea derivable.

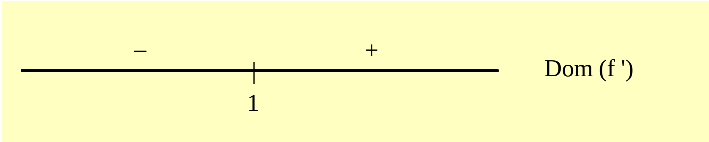
a) $f(x)=x^2$ es derivable en $\mathbb{R}$, siendo f '(x) = 2x .
Debemos encontrar los valores de x que hagan positiva la derivada.
Evidentemente, esto se consigue con valores positivos de x.
Así que:

f '(x) = 2x > 0 si x > 0 ⇒ f es creciente si x > 0
f '(x) = 2x < 0 si x < 0 ⇒ f es decreciente si x < 0

b) $f(x)=x^3+5$ es derivable en $\mathbb{R}$, siendo f '(x) = $3x^2$.
Como la expresión $3x^2$ es positiva para cualquier valor que demos a x (excepto para uno, ¿cuál?), la función será creciente en todos los puntos de su dominio. Es decir:

f(x) = x^3+5 es creciente en $\mathbb{R}$

c) f(x) = $x^2 - 2x$ es derivable en $\mathbb{R}$, siendo f '(x) = 2x - 2 = 2(x - 1) .
Para determinar el signo de f '(x) podemos recurrir al procedimiento utilizado en anteriores unidades.

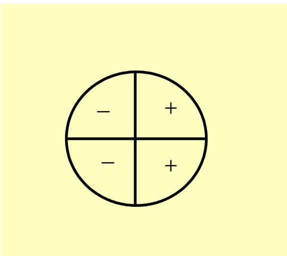


Es decir:

f '(x) > 0 si x > 1 $\Rightarrow$ f es creciente si x > 1
f '(x) < 0 si x < 1 $\Rightarrow$ f es decreciente si x < 1 .

d) La función identidad es derivable en $\mathbb{R}$, siendo f '(x) = 1 > 0 .
Por tanto, es creciente en $\mathbb{R}$.

e) La función seno es derivable en $\mathbb{R}$, siendo f '(x) = cos x .
Para determinar el signo de f '(x) debemos recordar el signo del coseno:



cos x > 0 si $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
cos x < 0 si $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Todo esto ocurre en el primer giro, pero debemos extendernos a $\mathbb{R}$.
Por lo tanto:

f es creciente si $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$
f es decreciente si $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$

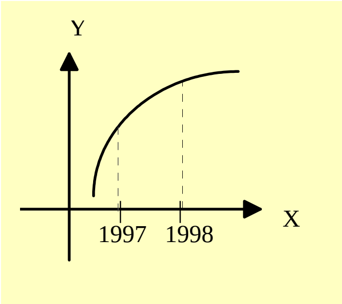
f) f(x) = $\frac{1}{x}$ es derivable en $\mathbb{R}$ **- {0}** , siendo f '(x) = $-\frac{1}{x^2}$.

Esta expresión es negativa para cualquier valor de $x \neq 0$. Así que,
f es decreciente en $\mathbb{R}$ **- {0}**.

Ejemplo 4.3 **¿Qué cantidad es mayor: 1997+ cos 1997 ó 1998 + cos 1998 ?**

<u>Solución</u> .- Consideremos la función f(x) = x + cos x ; Dom (f) = $\mathbb{R}$.

f '(x) = 1 - sen x $\geq$ 0 , $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f es creciente en todo $\mathbb{R}$, y su gráfica será del tipo:



Como 1997 < 1998 y f es creciente, entonces

f(1997) < f(1998). Y, por consiguiente:

1997 + cos 1997 < 1998 + cos 1998 .

ESTUDIO DE LA MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

Estudiar la monotonía de una función consiste en determinar los intervalos donde crece y donde decrece. Esto no siempre resulta fácil como en los ejemplos anteriores.
Cuando nos encontremos con una derivada cuya expresión no permita determinar su signo a simple vista, aplicaremos el ***método para el estudio de la monotonía.***

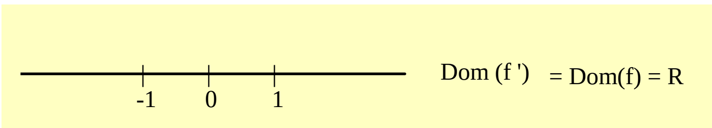
Ejemplo 5.3 **Estudiar la monotonía de la función** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+7$.

<u>Solución</u> .- Hay que estudiar el signo de f '(x) = $x^3 - x$.

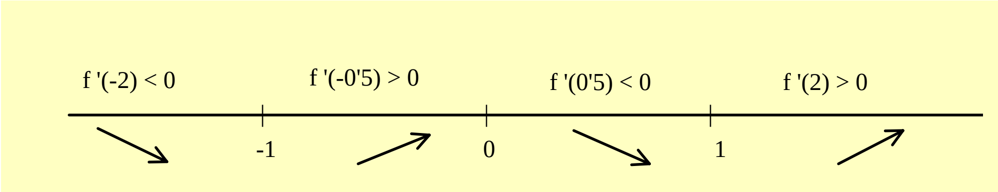
I.- Resolver la ecuación f '(x) = 0 .

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=-1$$

II.- Representar las soluciones obtenidas en el Dom (f ')$\cap$Dom (f) .



III.- El signo de f '(x) se determina dando a x un valor en cada intervalo.



Se tiene:

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{si} & x \in (-1,0) \cup (1,+\infty) \\ f'(x) < 0 & \text{si} & x \in (-\infty,-1) \cup (0,1) \end{array}$$

y escribiremos:

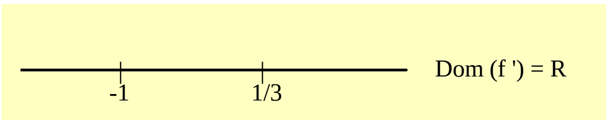
$$f \uparrow \ (-1,0) \cup (1,+\infty) \qquad \text{y} \qquad f \downarrow \ (-\infty,-1) \cup (0,1)$$

Ejemplo 6.3 **Estudiar la monotonía de la función** $f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$.

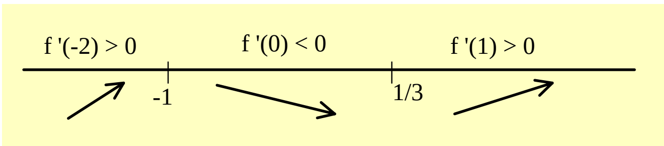
Solución .- A simple vista no es posible determinar el signo de $f'(x)$.
Aplicaremos el método para el estudio de la monotonía:

I.- $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, x = -1$

II.-



III.-



Por tanto: $f \uparrow (-\infty,-1) \cup (\frac{1}{3},+\infty) \quad y \quad f \downarrow (-1,\frac{1}{3})$

Ejemplo 7.3 **Estudiar la monotonía de la función** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$.

Solución .-

Método 1.- La monotonía de una función se estudia con su derivada primera.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 2x - (x^2-2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-1-x^2+2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Se observa que f es derivable salvo en los puntos x = 1 y x = -1 . El denominador de f '(x) es positivo, por ser un cuadrado. El signo de f '(x) dependerá, pues, del numerador. Ahora bien:

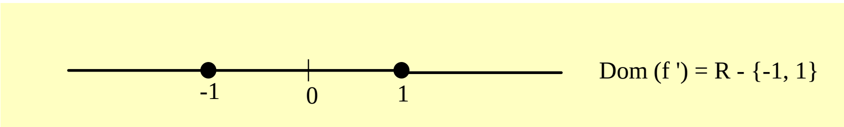
$2x > 0$ si $x > 0$ y $2x < 0$ si $x < 0$

Por lo tanto, $f \uparrow (0,+\infty)-\{1\}$ y $f \downarrow (-\infty,0)-\{-1\}$.

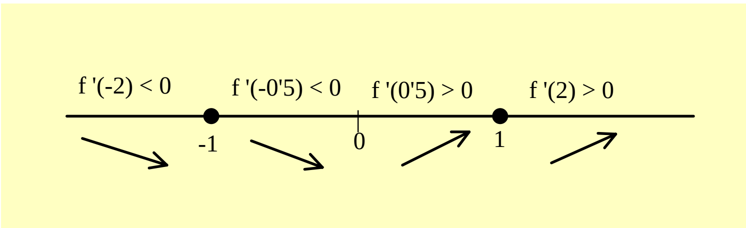
<u>Método 2</u> .- Aplicando el método para el estudio de la monotonía.

I.- $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

II.-



III.-



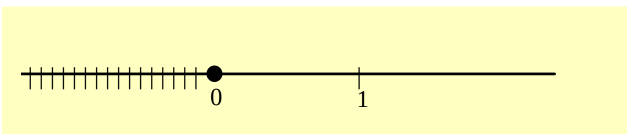
En definitiva: $f \uparrow (0,1)\cup(1,+\infty)$ y $f \downarrow (-\infty,-1)\cup(-1,0)$

Ejemplo 8.3 **Estudiar la monotonía de la función** $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

<u>Solución</u> .- Aplicaremos el método para el estudio de la monotonía.

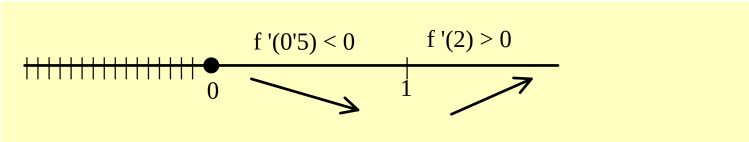
I.- $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

II.-



Dom (f) = $(0,+\infty)$

III.-



Por lo tanto, $f \uparrow (1,+\infty)$ y $f \downarrow (0,1)$.

Ejemplo 9.3 **Estudiar la monotonía de la función**

$$f(x) = -\frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + \frac{10 \cdot 2^x}{\ln 2} - 16x$$

Solución .- Nos encontramos con una función que causa respeto.
Si observamos que $\ln 2$ es constante y escribimos

$$\mathrm{f(x)} = -\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{2x-1} + \frac{10}{\ln 2} \cdot 2^x - 16x$$

entonces

$$\mathrm{f\,'(x)} = -\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{2x-1} \cdot \ln 2 \cdot 2 + \frac{10}{\ln 2} \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 16 =$$

$$= -2^{2x} + 10 \cdot 2^x - 16$$

I.- Aparece una ***ecuación exponencial***

$$-2^{2x} + 10 \cdot 2^x - 16 = 0$$
$$-(2^x)^2 + 10 \cdot 2^x - 16 = 0$$

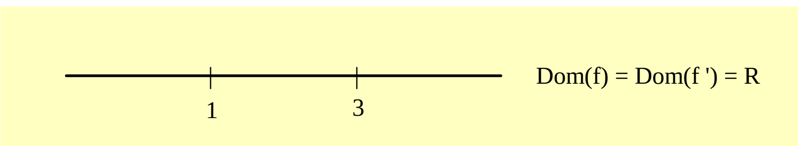
Haciendo el cambio de variables $2^x = t$ se convierte en la ecuación de segundo grado

$$-t^2 + 10t - 16 = 0$$

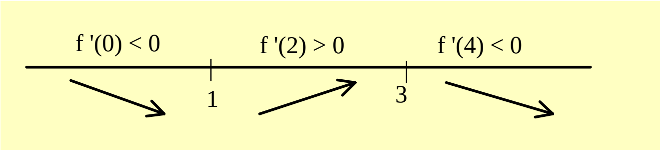
cuyas soluciones son $t = 8$ y $t = 2$.
Deshaciendo el cambio se obtiene:

$$2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \qquad \text{y} \qquad 2^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

II.-



III.-



Por lo tanto, $f \uparrow (1,3)$ y $f \downarrow (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$.

Ejemplo 10.3 **Estudiar la monotonía de** $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

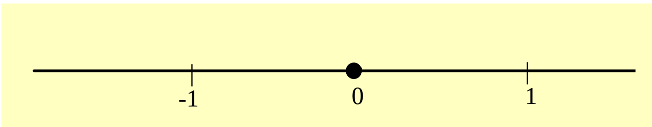
<u>Solución</u> .- Como la función irracional es de índice impar y el radicando un polinomio, f estará definida en todo $\mathbb{R}$, es decir Dom (f) = **R** .
Para derivar la escribiremos en forma potencial:

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2$$

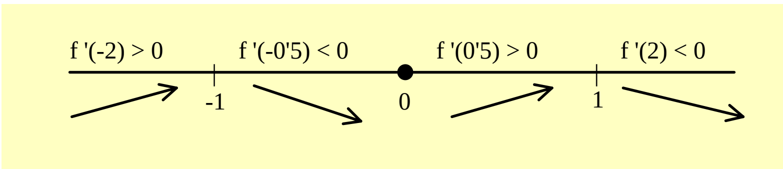
I.- $f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - 2x = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^3 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

II.- Obsérvese que Dom(f ') = $\mathbb{R}$ **- {0}** .



III.-

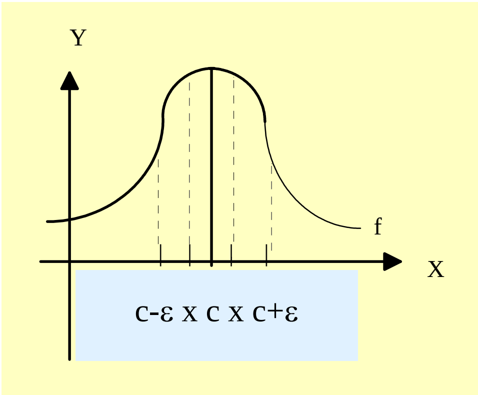


Por lo tanto:

$$f \uparrow (-\infty,-1) \cup (0,1) \quad y \quad f \downarrow (-1,0) \cup (1,+\infty)$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

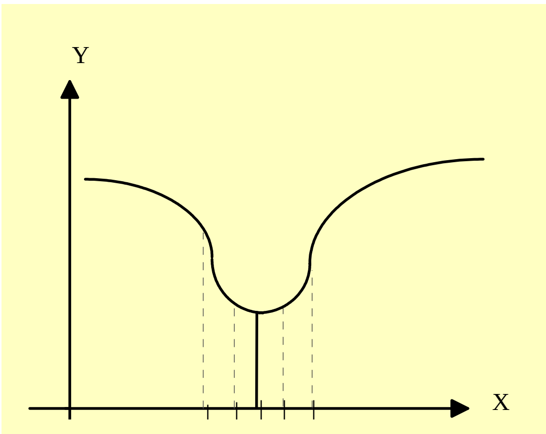
Sea f una función definida en el intervalo abierto (a, b) y $c \in (a,b)$.



Intuitivamente, f tiene un máximo relativo en el punto c si la ordenada de este punto es mayor o igual que las ordenadas de todos los puntos infinitamente próximos a c .
En Matemáticas, las cantidades infinitamente pequeñas, llamadas ***infinitesimales***, suelen representarse por las letras griegas ε y δ , épsilon y delta, respectivamente.

Se dice que una función f presenta un **máximo relativo** en c si , y sólo si, existe un $\varepsilon > 0$, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo x entre c-ε y c+ε .
En el lenguaje matemático:

$$\text{c es máximo relativo de f} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \mid f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$



c-ε x c x c+ε

Intuitivamente, f tiene un mínimo relativo en el punto c si la ordenada de este punto es menor o igual que las ordenadas de todos los puntos infinitamente próximos a c .

Se dice que una función f presenta un **mínimo relativo** en c si, y sólo si, existe un $\varepsilon > 0$, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo x entre c-ε y c+ε .
Como anteriormente:

$$\text{c es mínimo relativo de f} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \mid f(c) \leq f(x), \ \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$

OBSERVACIONES .-

1.- Si f presenta en c un máximo o un mínimo relativo, entonces f no es ni creciente ni decreciente en c .

2.- Si f presenta en c un máximo relativo, entonces f pasa de ser creciente a ser decreciente.

3.- Si f presenta en c un mínimo relativo, entonces f pasa de ser decreciente a ser creciente.

Supongamos que f es **derivable** en $c \in (a,b)$.

Una condición necesaria para que f tenga un máximo o un mínimo relativo en c es que f '(c) = 0 .

En efecto:

Si f tiene en c un máximo o un mínimo relativo, entonces f no es ni creciente ni decreciente en c . Por lo tanto, $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$. La única posibilidad, teniendo en cuenta que f es derivable en c, es que f '(c) = 0.

Las soluciones de la ecuación f '(x) = 0 se llaman **puntos singulares** de f . Por lo tanto, los puntos singulares de f serán los candidatos a máximos o mínimos relativos. Ahora bien, la condición necesaria para máximo relativo es la misma que para mínimo relativo: ¿cómo diferenciar uno de otro?.

Ejemplo 11.3 **Hallar los máximos y mínimos relativos de la función** $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 7$ **.**

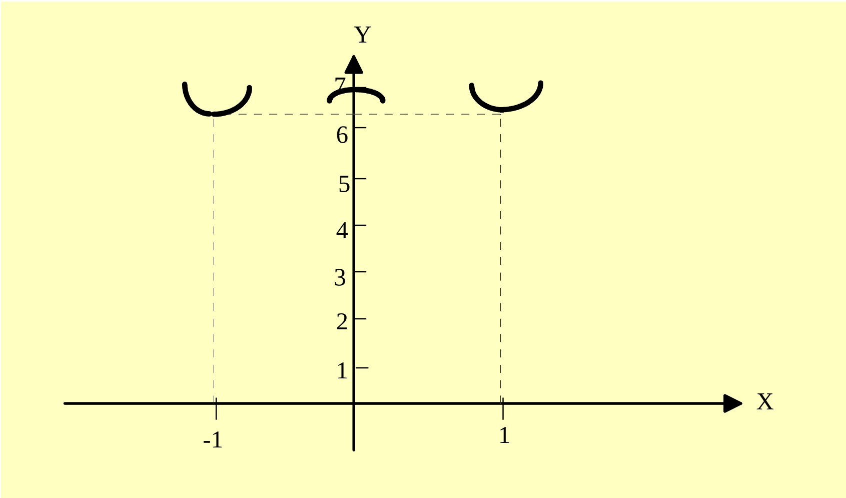
Solución .-

Los candidatos serán los puntos singulares de f que, según el Ejemplo 5.3, son x = 0, x = 1 y x = -1 .

En $x = -1$ hay un mínimo relativo, puesto que f pasa de ser decreciente a ser creciente. Por la misma razón, existe otro mínimo relativo en $x = 1$.
Sin embargo, en $x = 0$ existe un máximo relativo ya que f pasa de ser creciente a ser decreciente.
Así se obtienen las abscisas de los máximos y minimos relativos. Las ordenadas de los mínimos serán f(-1) y f(1) , y f(0) la ordenada del máximo.
Escribiremos:

$$\text{MÍN}(-1, \tfrac{27}{4}) \quad , \quad \text{MÁX}\,(0, 7) \quad , \quad \text{MÍN}(1, \tfrac{27}{4})$$

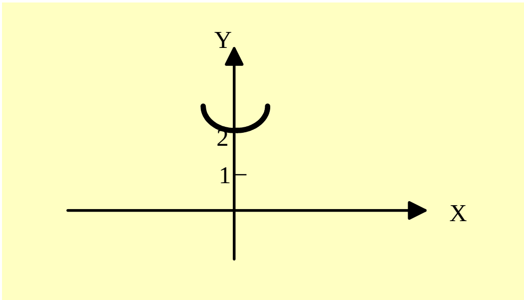
El significado geométrico es el siguiente:



Ejemplo 12.3 **Hallar los máximos y mínimos relativos de la función** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$.

Solución .-

Según el Ejemplo 7.3, el único punto singular es $x = 0$, que será la abscisa de un mínimo relativo, ya que en él la función pasa de ser decreciente a ser creciente. La ordenada es $f(0) = 2$, y escribiremos MÍN (0, 2) , cuya interpretación geométrica es la siguiente:



Ejemplo 13.3 **Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función seno en el primer giro.**

Solución .-

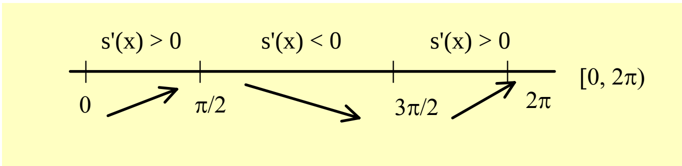
Sea s(x) = sen x .

I.- Buscar los puntos singulares.

s '(x) = cos x

cos x = 0 $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$

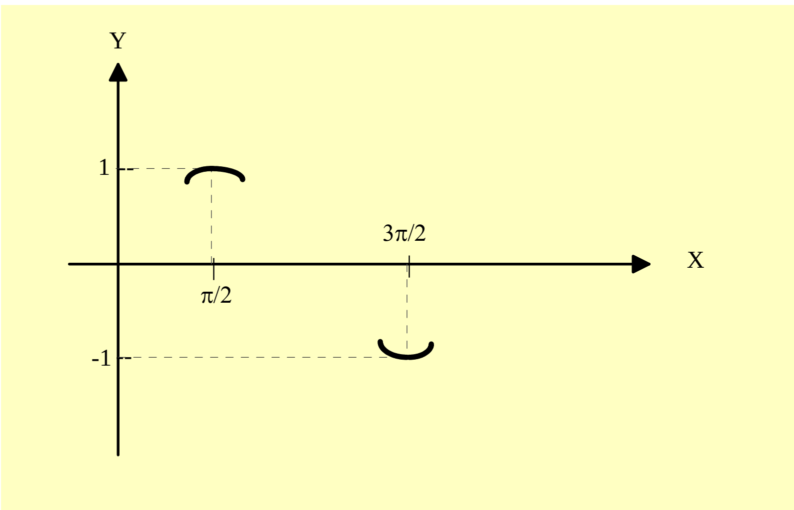
II.- Estudiar la monotonía en $[0, 2\pi)$.



Hay un máximo relativo para x = $\dfrac{\pi}{2}$, cuya ordenada es $s\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, y un mínimo relativo para x = $\dfrac{3\pi}{2}$, con ordenada $s\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$. Escribiremos:

$$MÁX\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \quad , \quad MÍN\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

cuya interpretación geométrica sería:



OBSERVACIÓN: En ***Trigonometría***, se estudia: "el valor máximo del seno es 1, y el mínimo -1".

Ejemplo 14.3 **Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función seno en su dominio.**

<u>Solución</u> .-
Como Dom(s) = $\mathbb{R}$, al buscar los puntos singulares obtendremos:

$$s'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad ; \ k \in \boldsymbol{Z}$$

En su dominio, la función seno tiene infinitos máximos e infinitos mínimos:

$$MÁX\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right) \quad , \quad MÍN\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, -1\right) \quad , \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

Ejemplo 15.3 **Hallar los máximos y mínimos relativos de la función f(x) = x + tg x .**

<u>Solución</u> .-

Al buscar los puntos singulares de f nos encontramos con una ecuación incompatible:

$$1 + 1 + tg^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 + tg^2 x = 0 \Leftrightarrow tg^2 x = -2 \text{ (Incompatible)}$$

<< ¿La no existencia de puntos singulares nos dice que la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos? >>.
Además, como f '(x) = $2 + tg^2 x > 0$, $\forall x \in Dom(f)$, resulta que f es siempre creciente.

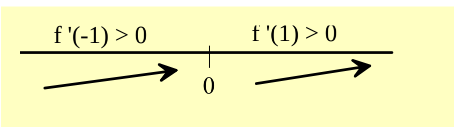
Ejemplo 16.3 **Hallar los máximos y mínimos relativos de** $f(x) = x^3$.

<u>Solución</u> .-

I.- Buscar los puntos singulares.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

II.- Estudiar la monotonía.



$Dom(f) \cap Dom(f') = \mathbf{R}$

La función es creciente en su dominio. No tiene ni máximos ni mínimos, aunque sí puntos singulares.

Con este ejemplo se pone de manifiesto que la existencia de puntos singulares no es suficiente para garantizar que la función tenga máximos o mínimos relativos.

<u>**Conclusión final**</u> : **un punto singular puede ser máximo relativo, mínimo relativo o ni máximo ni mínimo.**

Ejemplo 17.3 **Hallar el valor de $c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \ln \frac{x}{x^2+c}$ tenga un punto singular en x = c .**

<u>Solución</u> .-

En primer lugar, se calcula la función derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x^2+c}} \cdot \frac{x^2+c-x\cdot 2x}{(x^2+c)^2} = \frac{c-x^2}{x(x^2+c)}$$

Por ser x = c un punto singular f '(c) = 0 . Ahora bien:

$$f'(c) = \frac{c-c^2}{c(c^2+c)} = \frac{c(1-c)}{c^2(c+1)} = \frac{1-c}{c(c+1)}$$

Evidentemente, f '(c) = 0 si c = 1 .

<u>**OBSERVACIÓN**</u>: La función del Ejemplo 10.3 presenta un mínimo relativo en x = 0 y, sin embargo, éste no es un punto singular. ¿Cómo es posible?.
Téngase en cuenta que en la condición necesaria para la existencia de máximos o mínimos relativos se supone que f es derivable en c .
Ahora bien, la función del Ejemplo 10.3 no es derivable en x = 0, ya que la derivada se hace infinita. Por un lado, $0 \notin Dom(f')$ y por otro $0 \in Dom(f)$.

<u>**En definitiva**</u> : **los máximos y mínimos relativos de f los buscaremos entre sus puntos singulares y entre los puntos de su dominio en los que f no sea derivable.**

Ejemplo 18.3 **¿Qué se puede deducir si f presenta un mínimo relativo en x = -2 ?.**

Solución .-

Si f presenta un mínimo relativo en $x = -2$, o se trata de un punto singular o f no es derivable en $x = -2$, pero $-2 \in Dom(f)$.

Ejemplo 19.3 **¿Qué se puede deducir si f es derivable en $\mathbb{R}$ y presenta un máximo relativo en x = 5 ?.**

Solución .-

En este caso, se deduce que $x = 5$ es un punto singular de f .

Ejemplo 20.3 **¿Qué se deduce si f es derivable en $\mathbb{R}$ y presenta un mínimo relativo en el punto (-1, 3) ?.**

Solución .-

Se deduce que $x = -1$ es un punto singular cuya ordenada vale 3 . Es decir:

$$f'(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f(-1) = 3$$

Ejemplo 21.3 **Una función derivable en $\mathbb{R}$ presenta un máximo relativo en el punto (a, b) y un mínimo en (c, d) . ¿Qué se deduce?.**

Solución .-

Se deduce que $x = a$ y $x = c$ son puntos singulares de f , cuyas ordenadas son, respectivamente, b y d .
Es decir:

$$f'(a) = 0 \quad , \quad f'(c) = 0 \quad , \quad f(a) = b \quad , \quad f(c) = d$$

Ejemplo 22.3 **Hallar a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx$ tenga un mínimo relativo en el punto (2, -48) .**

<u>Solución</u> .-

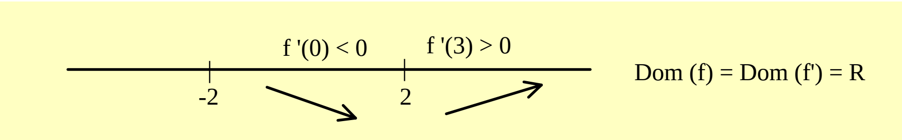
Como f es derivable en $\mathbb{R}$, siendo f '(x) = $3ax^2 + b$, entonces f '(2) = 0 y f(2) = -48.
Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a + b = 0 \\ 8a + 2b = -48 \end{cases}$$

cuya solución es a = 3 y b = -36 .
Por lo tanto, la función es f(x) = $3x^3 - 36x$. Estamos en condiciones de comprobar que se trata de un mínimo relativo.

I.- f '(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $9x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

II.-



Podemos preguntarnos: ¿Es imprescindible verificar la condición de mínimo?.

Ejemplo 23.3 **Hallar a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx$ tenga un máximo relativo en el punto (2, -48) .**

<u>Solución</u> .-

La única diferencia con el ejemplo anterior está en la palabra máximo.
El procedimiento, las operaciones y los resultados serían idénticos, obteniéndose la misma función.
Al verificar la condición de máximo nos encontraríamos con que, en x = 2 , f presenta un mínimo relativo, y , por consiguiente, el problema no tiene solución.
Estamos ante un problema incompatible.

<u>Conclusión</u> : **Es completamente imprescindible verificar la condición de máximo o mínimo relativo.**

OBSERVACIÓN: Algunos alumnos dicen que se trata de un problema "*mal planteado*", pero eso no es correcto. Todos los problemas están bien planteados, otra cosa es que tengan o no solución.

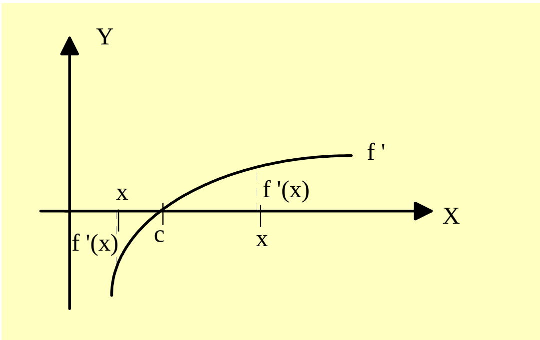
CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA

Sea c un punto singular de f .
a) Si $f''(c) > 0$, entonces f presenta un mínimo relativo en c .
b) Si $f''(c) < 0$, entonces f presenta un máximo relativo en c .

En efecto:

a) Ya sabemos que el crecimiento de una función se estudia con el signo de su derivada primera, de tal forma que si deseamos estudiar la monotonía de f , analizaremos el signo de f' . Si la monotonía que pretendemos conocer es la de f', analizaremos el signo de su derivada, es decir, el signo de $(f')' = f''$.

Por lo tanto, si $f''(c) > 0$ entonces f' es creciente en c , y como $f'(c) = 0$, su gráfica será del tipo expuesto.

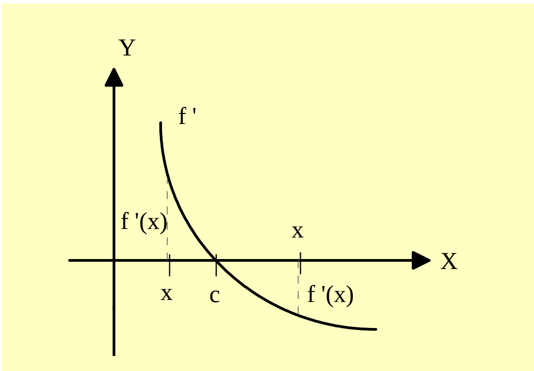


De esta gráfica se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ si } x < c \\ f'(x) > 0 \text{ si } x > c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f \downarrow \text{ si } x < c \\ f \uparrow \text{ si } x > c \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f pasa, en c, deser

decreciente a ser creciente $\Rightarrow$ f presenta un mínimo relativo en c .

b) Análogamente, si $f''(c) < 0$ entonces f' es decreciente en c , y como $f'(c) = 0$, su gráfica será como la de la figura.
Tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ si } x < c \\ f'(x) < 0 \text{ si } x > c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f \uparrow \text{ si } x < c \\ f \downarrow \text{ si } x > c \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f pasa, en c , de ser creciente a ser decreciente $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f presenta un máximo relativo en c .

Ejemplo 24.3 **Calcular, aplicando el criterio de la derivada segunda, los máximos y mínimos relativos de** $f(x) = xe^{x-x^2}$ **.**

Solución .-

I.- Buscar puntos singulares , ya que f es derivable en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{x-x^2} + x \cdot e^{x-x^2} \cdot (1-2x) = e^{x-x^2} \cdot (1 + x - 2x^2)$$

Recordando que la función exponencial nunca se anula, los puntos singulares se obtienen al resolver la ecuación

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2} \ , \ x = 1$$

II.-Sustituir los puntos singulares en la derivada segunda.

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{x-x^2}(1-2x)(1+x-2x^2) + e^{x-x^2}(1-4x) = \\ &= e^{x-x^2}(4x^3 - 4x^2 - x + 1) + e^{x-x^2}(1-4x) = \\ &= e^{x-x^2}(4x^3 - 4x^2 - 5x + 2) \end{aligned}$$

$f''(1) = -3 < 0 \Rightarrow$ hay un máximo relativo en $x = 1$.

$f''(-\tfrac{1}{2}) = 3e^{-\frac{3}{4}} > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo relativo para $x = -\tfrac{1}{2}$

Por lo tanto:

$$\text{MÁX}(1, 1) \quad , \quad \text{MÍN}(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}})$$

OBSERVACIÓN : Es interesante realizar este mismo ejemplo estudiando la monotonía. Es más fácil. Compruébese.

El criterio de la derivada segunda es útil para muchos ejemplos que se presentan en la práctica, sobre todo para funciones polinómicas. Pero tiene dos inconvenientes:

1.- La derivada segunda de algunas funciones puede resultar complicada.
2.- Puede ocurrir que **f ''(c) = 0** , en cuyo caso no se pueden sacar conclusiones : ***hay que recurrir al estudio de la monotonía.***

Ejemplo 25.3 **Calcular los máximos y mínimos relativos de** $f(x) = x^6 + 1$.

<u>Solución</u> .-

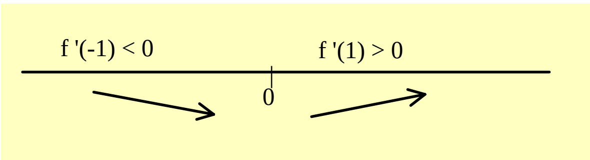
I.- Buscar puntos singulares, pues f es derivable en $\mathbb{R}$ **.**

$$f\,'(x) = 0 \iff 6x^5 = 0 \iff x = 0$$

II.- Sustituir el punto singular en la derivada segunda.

$$f\,''(x) = 30x^4 \Rightarrow f''(0) = 0 \ .$$

En estos casos hay que estudiar la monotonía.



$Dom(f) \cap Dom(f\,') = \mathbb{R}$

Por lo tanto, hay un mínimo relativo en x = 0 : MÍN (0, 1) .

OBSERVACIÓN : El criterio de la derivada segunda es útil para funciones con ***parámetros*** .

Ejemplo 26.3 **Calcular los máximos y mínimos relativos de la función** $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$**.**

<u>Solución</u> .-

I.- Buscar puntos singulares .
(f no es derivable en x = 0 , pero $0 \notin Dom(f)$).

$$f\,'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} = 0 \iff x^2 = a^2 \Rightarrow |x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$$

II.- Sustituir los puntos singulares en la derivada segunda.

$$f\,'(x) = \frac{1}{a} - ax^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2ax^{-3} = \frac{2a}{x^3}$$

f "(a) = $\frac{2a}{a^3} = \frac{2}{a^2} > 0 \Rightarrow$ *hay* un mínimo relativo en x = a .

f "(-a) = $\frac{2a}{(-a)^3} = -\frac{2}{a^2} < 0 \Rightarrow$ *hay* un máximo relativo en x = -a .

Por lo tanto: MÍN (a, 2) y MÁX (-a, -2) .

Ejemplo 27.3 **Hallar los máximos y mínimos relativos de la función f(x) = 5 + sen 3x . a) En ℝ. b) En el primer giro .**

Solución .-

a)

I.- Buscar puntos singulares, ya que f es derivable en ℝ**.**

f '(x) = 3cos 3x = 0 ⇔ $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x &= \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbf{Z}$$

II.- Aplicar el criterio de la derivada segunda : f "(x) = -9sen 3x .

f " $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) = -9sen\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -9sen\frac{\pi}{2} = -9 < 0 \Rightarrow$

⇒ f tiene máximos para x = $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$.

f " $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) = -9sen\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -9sen\frac{3\pi}{2} = 9 > 0 \Rightarrow$

⇒ f tiene mínimos para x = $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$.

La ordenada de los máximos será

f $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) = 5 + sen\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 5 + sen\frac{\pi}{2} = 6$

y la de los mínimos

f $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) = 5 + sen\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 5 + sen\frac{3\pi}{2} = 4$

Por lo tanto, hay infinitos máximos y mínimos relativos:

$$\text{MÁX}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, 6\right) \quad , \quad \text{MÍN}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}, 4\right) \qquad k \in \boldsymbol{Z}$$

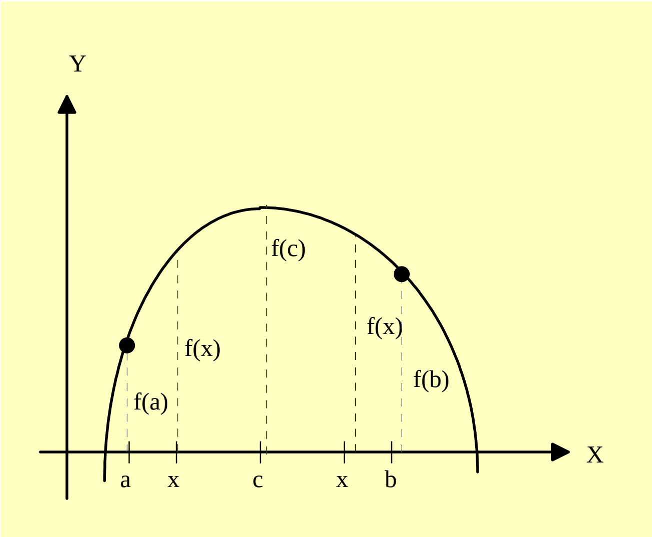
b) Basta con dar valores enteros a k , sin salirnos del primer giro, como si se tratase de calcular las soluciones particulares de una ecuación trigonométrica.
Se obtienen tres máximos y tres mínimos:

$$k = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \text{ máx} \\ x = \frac{\pi}{2} \text{ mín} \end{cases} \qquad k = 1 \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} \text{ máx} \\ x = \frac{7\pi}{6} \text{ mín} \end{cases} \qquad k = 2 \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} \text{ máx} \\ x = \frac{11\pi}{6} \text{ mín} \end{cases}$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a, b] y $c \in [a,b]$.

Intuitivamente, f tiene un máximo absoluto en el punto c si la ordenada de este punto es mayor o igual que las ordenadas de todos los puntos del intervalo cerrado [a, b].

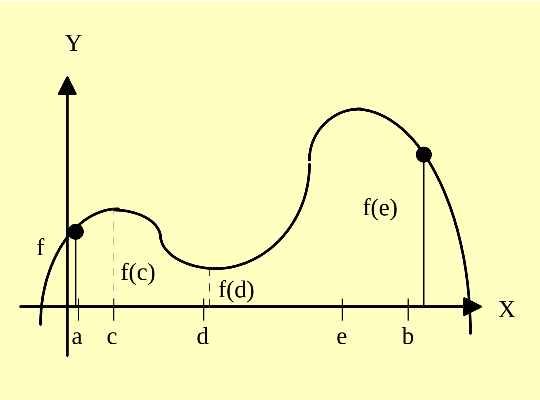


Es decir, el máximo absoluto está en el punto de mayor altura.

En el lenguaje matemático, f tiene un **máximo absoluto** en $c \in [a,b]$ si f(c)$\geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Análogamente, f tiene un **mínimo absoluto** en $c \in [a,b]$ si $f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.
Por ejemplo, en el gráfico anterior f tiene un mínimo absoluto en el punto a .

Obsérvense los siguientes gráficos:

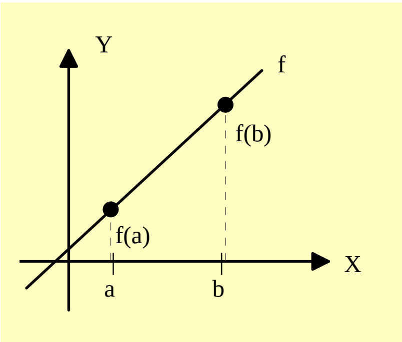


I.- En c y e hay máximos relativos.

II.- En e hay un máximo absoluto.

III.- En d hay mínimo relativo y absoluto.

<u>Conclusión 1ª</u> .- Un máximo relativo puede ser máximo absoluto y un mínimo relativo puede ser mínimo absoluto.



I.- En a hay un mínimo absoluto.

II.- En b hay un máximo absoluto.

<u>Conclusión 2ª</u> .- En los extremos del intervalo puede haber máximo o mínimo absoluto.

<u>Conclusión final</u> .- Para buscar los máximos y mínimos absolutos tendremos en cuenta los máximos y mínimos relativos y los extremos del intervalo.

<u>Teorema de Weierstrass</u> .- Toda función continua en un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo absoluto.

Ejemplo 28.3 **Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ en el intervalo cerrado [-5, 5].**

Solución .-

Las funciones polinómicas son continuas y, según el teorema de Weierstrass, tendrán máximo y mínimo absoluto en cualquier intervalo cerrado.
Los candidatos son los máximos y mínimos relativos y los extremos del intervalo.
Al ser f derivable en $\mathbb{R}$ buscaremos sus puntos singulares:

f '(x) = 0 $\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \, , x = -6$

Ahora bien, $-6 \notin [-5, 5]$ y por lo tanto el máximo y el mínimo absoluto se alcanzarán en x = 4, x = 5 o x = -5 .

¿Cómo averiguarlo?. Basta con hallar sus ordenadas : el de mayor ordenada será el punto donde se alcanza el máximo absoluto, y análogamente el mínimo absoluto.

f(4) = 64 + 48 - 288 + 90 = -86
f(5) = 125 + 75 -360 + 90 = -70
f(-5) = -125 + 75 +360 + 90 = 400

Por consiguiente, el máximo absoluto es 400 y se alcanza en x = -5 y el mínimo absoluto es -86 y se alcanza en x = 4 .

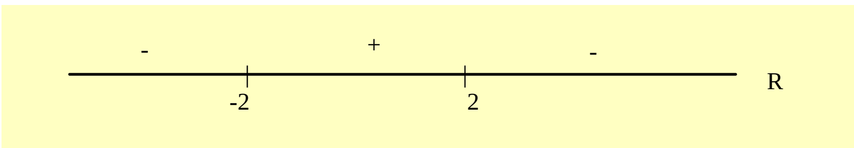
Esto significa que

$$-86 \leq x^3 + 3x^2 - 72x + 90 \leq 400 \quad \forall x \in [-5, 5]$$

Ejemplo 29.3 **Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo cerrado [-2, 2] .**

Solución .-

En primer lugar, calcularemos el dominio de esta función irracional, que estará formado por los valores que hagan positivo o nulo el radicando.
La función $4 - x^2$ se anula para x = ± 2 y tiene dominio $\mathbb{R}$.



Por lo tanto, Dom(f) = [-2, 2] siendo f continua en su dominio.

Como $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ vemos que f no es derivable en $x = \pm 2$.
Los candidatos son:

I.- Máximos y mínimos relativos.

El único punto singular es x = 0 que pertenece al intervalo [-2, 2].
Los puntos del dominio en los que f no es derivable son 2 y -2 .

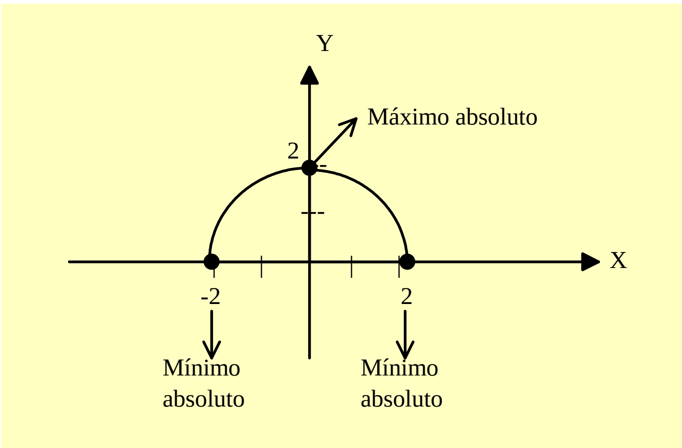
II.- Extremos del intervalo : 2 y -2 .

Calculemos sus ordenadas:

f(0) = 2 , f(2) = 0 , f(-2) = 0

Por consiguiente, el máximo absoluto es 2 y se alcanza en x = 0 , y el mínimo absoluto es 0 que se alcanza en x = 2 y x = -2 .

Estos resultados pueden interpretarse mejor observando la gráfica de la función, que es una semicircunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio 2.



Ejemplo 30.3 **Dada la función** $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, **demostrar que se verifica la desigualdad** $0 \le x^2 \cdot \ln x \le e^2 \quad \forall x \in [1, e]$.

Solución .-

Toda función continua en un intervalo cerrado estará comprendida entre su valor mínimo y su valor máximo.

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

Se observa que f es derivable en su dominio $(0,+\infty)$.
Como la desigualdad que nos piden es válida en el intervalo cerrado [1, e] , buscaremos el máximo y el mínimo absoluto de f en dicho intervalo.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ó \quad 2\ln x + 1 = 0$$

Nos encontramos con una ecuación logarítmica fácil de resolver:

$$2\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Los puntos singulares de f son, pues , x = 0 y x = $\frac{1}{\sqrt{e}}$, que no pertenecen al intervalo [1, e] .
Por lo tanto, los candidatos son los extremos del intervalo 1 y e :

$$f(1) = 0 \quad , \quad f(e) = e^2$$

El máximo absoluto es e^2 que se alcanza para x = e y el mínimo absoluto 0 para x = 1.
Por consiguiente, como dijimos al principio, f estará comprendida entre su valor mínimo y su valor máximo, es decir:

$$0 \le x^2 \cdot \ln x \le e^2 \quad \forall x \in [1, e]$$

Ejemplo 31.3 **Demostrar que se verifica la siguiente desigualdad:**
$-2 \le 2sen\, x + sen\, 2x \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ **.**

Solución .-

Sea la función f(x) = 2sen x + sen 2x , que es continua en $\mathbb{R}$ y , en particular en el intervalo cerrado $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$. Tiene , por tanto, un máximo y un mínimo absoluto.

Asimismo, es derivable en $\mathbb{R}$ siendo f '(x) = 2cos x + 2cos 2x .
Para calcular los puntos singulares tendremos que resolver esta ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x + \cos x = 0$$
$$\cos^2 x - sen^2 x + \cos x = 0$$
$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 0$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$ en el primer giro

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$

De estos tres $\frac{5\pi}{3} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, siendo los candidatos a máximo y mínimo absoluto $\frac{\pi}{3}, \pi, 0, \frac{3\pi}{2}$.

Ahora bien:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2sen\frac{\pi}{3} + sen\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f(\pi) = 2sen\ \pi + sen\ 2\pi = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2sen\frac{3\pi}{2} + sen\ 3\pi = -2$$

De esta forma, el máximo absoluto se alcanza para x = $\frac{\pi}{3}$ y el mínimo absoluto para x = $\frac{3\pi}{2}$.
Según la definición de máximo absoluto $f(x) \le f\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, y según la de mínimo absoluto $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \le f(x) \quad \forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
En definitiva:

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

es decir $$-2 \le 2sen\ x + sen\ 2x \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

1.- La función $f(x) = x^n$, con n impar, es siempre creciente. ¿Por qué?.

2.- Demostrar que la función $f(x) = \frac{a}{x}$ es creciente si $a<0$ y decreciente si $a>0$.

3.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = sen\, x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4.- ¿Para qué valores de k es siempre creciente la función $f(x) = \frac{x+1}{kx+2}$?. **(S:** $k<2$**).**

5.- Se sabe que la función $f(x)$ tiene por derivada $f'(x)>0$.
Estudiar el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $g(x) = f(x) + k$; $k\in\mathbb{R}$ b) $g(x) = kf(x)$; $k\in\mathbb{R}$, $k\neq 0$

6.- Estudiar el crecimiento de las funciones $f(x) = -e^{-x}$ y $g(x) = ln\, x$.

7.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = x^2-6x+9$ **(S:** Crece en $(3,+\infty)$ y decrece en $(-\infty,3)$**).**
b) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 - 30x - 6$ **(S:** Crece en $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ y decrece en $(-1,5)$**).**
c) $f(x) = cos\, x - x$ **(S:** Decrece en $(-\infty,+\infty)$).
d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ **(S**: Crece en $(-1,1)$. Decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$**).**
e) $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$ **(S:** Crece en $(-\infty,+\infty)$**).**
f) $f(x) = 1-x^3$ **(S:** Decrece en $(-\infty,+\infty)$**).**

8.- La función $f(x) = \frac{ax+1}{x^2+1}$ es decreciente en $x = 0$. Determinar el signo de a.

9.- De sabe que la función $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3}$ es decreciente en $x = 0$ y en $x = -2$, con $a\neq 0$.
Demuestra que a y b han de ser negativos y que f ha de ser decreciente en $x = -1$.

10.-Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = arc\, tg\frac{x-1}{x}$ en $(0,+\infty)$.
Calcular $f(2)$ y $f(3)$, y utilizar los resultados anteriores para demostrar que

$$arc\, tg\tfrac{1}{2} < arc\, tg\tfrac{2}{3}$$

11.-¿Qué cantidad es mayor: $2006 + cos\,2006$ ó $2007 + cos\,2007$?.

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1.- Calcular los máximos y mínimos de las funciones:

a) f(x) = $x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 6$ **(S:** Mínimo en x = 0**).**

b) f(x) = sen 4x **(S:** Máximo en $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; Mínimo en $\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$**).**

2.- La función f(x) = $x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo 3 para x = 2. Hallar p y q .

(S: p = -3 ; q = 7**).**

3.- Encontrar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a) f(x) = tg x b) f(x) = 4 + sen 4x

4.- Dada la función f(x) = $2x^3 + ax^2 + bx + c, calcular$ a, b y c para que:

a) En x = 2 y x = -3 tenga puntos singulares.

b) En uno de tales puntos, tenga un máximo relativo igual a 100.

(S: a = 3, b = -36, c = 19**).**

5.- a) ¿Qué puede afirmarse de una función f si se sabe que f '(x)<0 para x<0 y f '(x)>0 para x>0 ?.

b) Averiguar si x = 0 es un punto de máximo relativo, mínimo relativo o ninguna de las dos cosas , para la función f(x) = x^4 .

6.- La función f(x) = $ax^3 + bx$ tiene un valor mínimo -48 en el punto x = 2. Calcular a y b.

(S: a = 3 , b = -36**).**

7.- Calcular los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a) f(x) = cot x b) f(x) = $\frac{x}{2} - arc\ tg\, x$ **(S:** b) m(1, $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$) ; M(-1, $\frac{-1}{2} + \frac{\pi}{4}$) **).**

8.- Dada la función f(x) = ax + ln $(a + x^2)$, donde a∈$\mathbb{R}^+$, se pide:

a) Hallar a sabiendo que x = -1 es un punto singular.

b) Averiguar si dicho punto es máximo o mínimo relativo.

(S: a) a = 1 ; b) Ni máximo ni mínimo**)**

9.- Dada la función f(x) = $\frac{ax^2 + 1}{a + x}$, donde a∈$\mathbb{R}$, se pide:

a) Valor de a sabiendo que f tiene un punto singular en x = -2.

b) Averiguar si dicho punto es máximo o es mínimo.

c) ¿Hay más puntos singulares?.

(S: a) a = $\frac{1}{2}$; b) Máximo ; c) Sí, x = 1**).**

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

10.-Dada la función f(x) = ln x - ln (x^2+a) , donde a$\in \mathbb{R}-\{0\}$, hallar el valor de a sabiendo que f tiene un punto singular en x = a.

(S: a = 1**).**

11.- Dada la función f(x) = x + $\frac{1}{x+a}$, donde a$\in\mathbb{R}$, se pide:

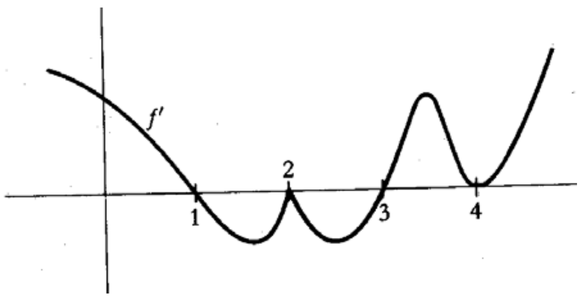
a) Puntos singulares de f.
b) Máximos y mínimos relativos.
c) Valor de a para que el mínimo se alcance en un punto de abscisa doble que la abscisa del máximo.

(S: a) x = ±1-a ; b) m(1-a, 2-a) , M(-1-a, -2-a) ; c) a = -3**).**

12.- Si $a_1 < a_2 < ... < a_n$, demostrar que el punto mínimo de la siguiente función se obtiene para la media aritmética de $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

13.- La figura muestra la gráfica de la derivada de f .
Hallar todos los puntos máximos y mínimos relativos de f .
(S: Máximo en x = 1; mínimo en x = 3 **)**



14.- Para cada una de las siguientes funciones, hallar el máximo y el mínimo en los intervalos indicados:

a) f(x) = x^3-x^2-8x+1 sobre [-2,2] **(S:** M = $\frac{203}{27}$, m = -11**).**
b) f(x) = x^5+x+1 sobre [-1,1] **(S**: M = 3 , m = -1**).**
c) f(x) = $3x^4-8x^3+6x^2$ sobre $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **(S:** M = $\frac{43}{16}$, m = 0**).**
d) f(x) = $\frac{1}{x^5+x+1}$ sobre $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ **(S**: M = $\frac{32}{15}$, m = $\frac{1}{3}$**).**
e) f(x) = $\frac{x+1}{x^2+1}$ sobre $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ **(S:** M = $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, m = 0**).**

REGLA DE L'HÔPITAL

En cursos anteriores, al estudiar límites de funciones, aparecen las indeterminaciones

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

y se aprenden los artificios necesarios para resolverlas.
Generalmente, surgen en límites de funciones racionales, ya sean en un punto finito o en el infinito.
Pero, ¿cómo resolver la indeterminación $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}$?.

En estos casos suele aplicarse la *regla de L'Hôpital* , que establece:

Sean f y g dos funciones derivables tales que existe

el $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Si el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ *ó* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

OBSERVACIÓN: ***Se derivan***, simultáneamente, el ***numerador*** y ***denominador*** de la expresión.
Un error muy frecuente es aplicar la derivada de un cociente.

Ejemplo 38.3 **Calcular los siguientes límites:**

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 3x}{sen\, 4x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x}$

Solución .-

No olvidemos que, ante todo, debe comprobarse si se trata o no de una indeterminación.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\, 3x}{sen\, 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{4\cos 4x} = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1} = \frac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+tg^2 x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

OBSERVACIÓN : Puede ocurrir que al aplicar la regla de L'Hôpital nos encontremos nuevamente con una indeterminación. En este caso, volveremos a aplicarla .

Ejemplo 39.3 **Calcular por dos métodos el siguiente límite:**

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$$

Solución .-

Se trata de una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Método 1 .- Aplicando la ***regla de Ruffini.***

	1	3	3	1
-1		-1	-2	-1
	1	2	1	0
-1		-1	-1	
	1	1	0	

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} (x+1) = 0$$

Método 2 .- Aplicando la ***regla de L'Hôpital*** .

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{3x^2+6x+3}{2x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{6x+6}{2} = 0$$

OBSERVACIÓN : La fórmula de L'Hôpital es válida tanto si **a** es finito como infinito.

Ejemplo 40.3 **Calcular por dos métodos el límite siguiente:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+6x^2-1}{2x^3-7x+6}$$

Solución .-

Método 1 .- Recordemos que para el cálculo de límites en el infinito de funciones racionales, sólo había que tener en cuenta los términos de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+6x^2-1}{2x^3-7x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

Método 2 .- Con la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+6x^2-1}{2x^3-7x+6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+12x}{6x^2-7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x+12}{12x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

OBSERVACIÓN : En algunos casos, tras aplicar la regla de L'Hôpital basta con sustituir x por el valor al que tiende para obtener el resultado del límite.

Ejemplo 41.3 **Calcular** $\lim_{x\to 0} \frac{arc\ tg\ 2x}{arc\ tg\ 3x}$.

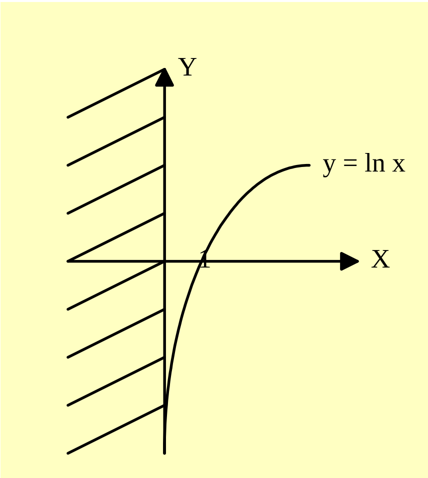
Solución .-

$$\lim_{x\to 0} \frac{arc\ tg\ 2x}{arc\ tg\ 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2}{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

OBSERVACIÓN : Otras veces interesa simplificar todo lo posible antes de sustituir.

Ejemplo 42.3 **Calcular** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2-1)}{\ln(x-1)}$.

Solución .-



La función logarítmica neperiana no está definida para x = 0 , pues su dominio es $(0,+\infty)$.
Sin embargo, observando la gráfica vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(x-1)} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{1}{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} = 1$$

Ejemplo 43.3 **Calcular los siguientes límites:**

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x-1}{x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-2^x}{x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{2^x-1}$

<u>Solución</u> .-

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x \cdot \ln 5}{1} = \ln 5$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x \cdot \ln 3 - 2^x \cdot \ln 2}{1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x \cdot \ln 3}{2^x \cdot \ln 2} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

OBSERVACIÓN : Si se aplica reiteradamente la regla de L'Hôpital sin asegurarse de que se trata de una indeterminación, se cometerá un grave error.

Ejemplo 44.3 **Hay un error en el siguiente cálculo. Encuéntralo y corrígelo.**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 5}{2x - 3} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2} = 1$$

<u>Solución</u> .-

El error se comete en el segundo paso, pues no hay indeterminación.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 5}{2x - 3} = \frac{-1}{1} = -1$$

Existen un total de ***siete indeterminaciones***:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad , \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad , \quad [\infty - \infty] \quad , \quad [0 \cdot \infty] \quad , \quad [0^0] \quad , \quad [\infty^0] \quad , \quad [1^\infty]$$

La regla de L'Hôpital resuelve directamente las dos primeras.
Mediante transformaciones algebraicas pueden reducirse las demás a los tipos $\left[\frac{0}{0}\right]$ *o* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ y, a continuación, aplicar la regla.

INDETERMINACIÓN $[\infty-\infty]$: Suele resolverse convirtiendo la diferencia en fracción.

Ejemplo 45.3 **Calcular:**

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - tg\, x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}\right]$

Solución .-

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - tg\, x) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{sen\, x}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-sen\, x}{\cos x} =$

$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-sen\, x} = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}\right] = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)(e^{x-1}-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}-1+(x-1)e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{xe^{x-1}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+xe^{x-1}} = \frac{1}{2}$

INDETERMINACIÓN $[0\cdot\infty]$: Un producto se puede transformar en cociente de dos formas:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Utilizaremos la que sea más cómoda para derivar.

Ejemplo 46.3 **Calcular:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cot 2x$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1)$

Solución .-

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cot 2x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\dfrac{1}{\cot 2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg\ 2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+tg^2 2x)\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(1-x) = 0$

INDETERMINACIÓN $[0^0]$: Supongamos que vamos a calcular el $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ y resulta que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$
Llamamos L al límite buscado, es decir

$$L = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

A continuación sacamos logaritmo y, recordando que el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, la indeterminación se convierte en $[0\cdot\infty]$.

En efecto:

$$\ln L = \lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = [0\cdot\infty]$$

Ejemplo 47.3 **Calcular:**

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} x^x \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$$

Solución .-

Una vez comprobado que se trata de una indeterminación del tipo $[0^0]$, se procede así:

a) Sea $L = \lim_{x\to 0} x^x$.. Sacando logaritmos tendremos:

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

Por último, aplicando la definición de logaritmo:

$$\ln L = 0 \ \Rightarrow\ L = e^0 = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0} x^x = 1$$

b) $\ln L = \lim_{x\to 0} \ln x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(e^x-1)} \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+xe^x} = 1$$

Al ser $\ln L = 1$, entonces $L = e^1 = e$.

INDETERMINACIÓN $[\infty^0]$ **:** Se resuelve con el mismo procedimiento que la indeterminación $[0^0]$.

Ejemplo 48.3 **Calcular:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$

<u>Solución</u> .-

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x} = [\infty^0]$. Sea L el valor de dicho límite, entonces

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x} = \lim_{x\to 0} tg\,x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{tg\,x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\cot x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{sen^2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sen^2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2sen\,x\cos x}{1} = 0$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$\ln L = 0 \;\Rightarrow\; L = e^0 = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x} = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{2}{x}} = [\infty^0]$. Sea L el valor del límite buscado, entonces:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty}\ln x^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Por lo tanto, $L = e^0 = 1$.

INDETERMINACIÓN $[1^\infty]$: Las tres indeterminaciones de tipo potencial se resuelven con el mismo procedimiento.

Ejemplo 49.3 **Calcular:**

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3} \quad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$$

Solución .-

Se comprueba que corresponden a indeterminaciones del tipo $[1^{\infty}]$.

a) $\ln \mathrm{L} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = [\infty\cdot 0] =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Por lo tanto, L = e .

b) $\ln \mathrm{L} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} (2x+3)\cdot\ln\frac{x+1}{x-1} = [\infty\cdot 0] =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{2x+3}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{-2}{(2x+3)^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2(2x+3)^2}{-2(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+12x+9}{x^2-1} = 4 \quad\Rightarrow\quad L = e^4 .$$

c) $\ln \mathrm{L} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{b}{x}\cdot\ln(1+ax) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{b\ln(1+ax)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{b\cdot\frac{1}{1+ax}\cdot a}{1} = ba$$

En definitiva, ln L = ba y, por lo tanto, el límite buscado es

$$\mathrm{L} = e^{ba}$$

Ejemplo 50.3 **Calcular el valor de k para que el**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\boldsymbol{k}}{x}\right)^{3x}=e^{6}$$

Solución .-

Se trata de una indeterminación del tipo $[1^{\infty}]$. Sea L el valor del límite.

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+k}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}3x\cdot\ln\frac{x+k}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+k}{x}}{\frac{1}{3x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+k}\cdot\frac{-k}{x^{2}}}{-\frac{1}{3x^{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3kx^{2}}{x^{2}+kx}=3k\,.$$

Por lo tanto, ln L = 3k y , en consecuencia, L = e^{3k} .

Como el resultado del límite debe ser e^{6} , entonces

$$e^{3k}=e^{6}\quad\Leftrightarrow\quad 3k=6\quad\Leftrightarrow\quad k=2$$

****

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
I.E.S. Bajo Guadalquivir
Departamento de Matemáticas
Lebrija

Bachillerato:
-Tecnológico
-Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

REGLA DE L´HÔPITAL

1.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+sen\,x} = \frac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1} = -\frac{\pi}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\,2x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{6-x\sqrt{x}} = 0$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tg\,x}{\cos 2x} = 1$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

2.- Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\,x} = 2$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} = 3a$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} = \frac{4}{9}$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^m - x^m}{\ln a^m - \ln x^m} = a^m$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 2x} = \frac{9}{4}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arc\,tg\,2x}{arc\,tg\,3x} = \frac{2}{3}$

3.- ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L´Hôpital?.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

4.- Resolver las siguientes indeterminaciones:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x(e^{\pi x}+1)}\right) = \frac{\pi}{4}$ c) $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x)\cdot tg\dfrac{x}{2} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right) = 0$ e) $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot \ln\dfrac{x-a}{x+a} = -2a$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\cdot \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -2$

5.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (tg\,x)^{\cos x} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+sen\,2x)^{\frac{\pi}{x}} = e^{2\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1)^x = 1$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n - a^n)^{\frac{1}{\ln x}} = e^n$ f) $\lim\limits_{x\to a} \left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{2a}\right)} = e^{\frac{2}{\pi}}$

6.- Hallar $c\in\mathbf{R}$ de modo que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$.

(S: c = ln 2 **).**